UN PROBLEMA DE VALOR INICIAL CON VALORES DE FRONTERA PARA LA ECUACIÓN DE BENNEY-LUKE

OSCAR EDUARDO ESCOBAR LASSO

Trabajo de grado presentado como requisito
para optar al título de Magister en Ciencias Matemáticas.

Director
José Raúl Quintero Henao.
Ph.D

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2017

UN PROBLEMA DE VALOR INICIAL CON VALORES DE FRONTERA PARA LA ECUACIÓN DE BENNEY-LUKE

OSCAR EDUARDO ESCOBAR LASSO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI
2017

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS

OSCAR EDUARDO ESCOBAR LASSO, 1985

UN PROBLEMA DE VALOR INICIAL CON VALORES DE FRONTERA PARA LA ECUACIÓN DE BENNEY-LUKE

Palabras claves: Problema de valor inicial, problema de valor inicial con condición de frontera, buen planteamiento local, buen planteamiento global, ecuación de Benney-Luke.

SANTIAGO DE CALI
2017

Índice general

Índice General **4**

1. Notaciones y preliminares **9**

2. IBVP lineal homogéneo: casos particulares **11**

2.1. **IBVP lineal homogéneo : caso** $f_1 \equiv f_2 \equiv 0$ 13

2.2. **IVP** lineal homogéneo sobre la recta 28

2.3. **IBVP** lineal homogéneo: caso $h_1 \equiv h_2 \equiv 0$. 36

3. IBVP lineal homogéneo: caso general **39**

4. IBVP no lineal **49**

4.1. **IBVP** no lineal: existencia local 49

4.2. **IBVP** no lineal: existencia global 55

Resumen

En éste trabajo de investigación se estudiará la buena colocación local para un problema de valor inicial, con condiciones de frontera y condiciones iniciales en espacios de tipo Sobolev adecuados, asociado con la ecuación de Benney-Luke en la semirecta, imponiendo algunas condiciones de compatibilidad en los datos iniciales y de frontera. Ademas, se mostrará que la aplicación que asocia a éstos datos iniciales y de frontera con su respectiva solución al problema es Lipschitz entre espacios de Banach adecuados.

Introducción

El estudio del problema de valor inicial (buena colocación) asociado con modelos de evolución ha sido de gran interés desde tiempos remotos por parte de matemáticos, físicos, químico o biólogos, entre otros, debido a que estos modelos están ligados a la descripición de diversos fenómenos en sus respectivas áreas de estudio. En el caso de modelos de evolución relacionados con la descripción de ondas de agua, el interés comenzó con las observaciones de un ingeniero naval escocés John Scott Russell (1808-1882) quien descubrió lo que hoy se conoce como un solitón (onda de transmisión u onda solitaria), mientras hacía un estudio de la quilla de los botes en el Union Canal en Hermiston (Escocia), muy cerca del campus Riccarton de la Universidad de Heriot-Watt (Edimburgo). Como resultado del estudio de éste fenómeno, y de las investigaciones de J. Boussinesq y Lord Rayleigh, los matemáticos holandeses Diederik Johannes Korteweg(1848-1941) y su estudiante Gustav de Vries (1866-1934), obtuvieron una ecuación satisfactoria que describe el perfil de la onda. Esta ecuación estaba basada en la suposición de que la profundidad del agua es pequeña en comparación con la anchura de las ondas y relaciona la amplitud de la onda y sus cambios en el espacio con el cambio de la amplitud en el tiempo. La ecuación propuesta por D. Korteweg y G. de Vries (denominada ecuación **Korteweg-de Vries** o simplemente ecuación **KdV**)

$$u_t + \epsilon\, u u_x + \mu\, u_{xxx} = 0,$$

es uno de los modelos clásicos no lineales mas relevantes en el estudio de ondas de agua de gran elongación y de pequeña amplitud. Es importante mencionar que el estudio de los *problemas de valor inicial con condiciones de frontera* (**IBVP** en adelante) para modelos dispersivos de ondas de agua han llamado la atención de muchos investigadores en los últimos años, debido a la necesidad de considerar estos modelos en dominios finitos o en semirectas y además, a la importancia en la teoría de controlabilidad de estos modelos. Por ejemplo, el **IBVP** de la ecuación KdV

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^3 u + u\partial_x u &= 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \quad k \in \mathbb{N} \\ u(0,t) &= h(t), \quad u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{1}$$

ha sido abordado por diferentes matemáticos. La buena colocación local para el **IBVP** (1) para datos iniciales $(\varphi, h) \in H^s(\mathbb{R}^+) \times H_{loc}^{\frac{s+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$ con $s \geq 0$, fue mostrada en [7] por J. Colliander y C. Kenig, reemplazando el **IBVP** por un *problema de valor inicial* (**IVP** en adelante) forzado. En [8] J. Holmer estableció el mismo resultado para el caso $s \geq -\frac{3}{4}$. En [6] J. Bona, S. Sun, y B. Zhang estudiaron la buena colocación local del problema utilizando la técnica de la transformada de Laplace para $(\varphi, h) \in h^s(\mathbb{R}^+) \times H_{loc}^{\frac{s+1}{3}}(\mathbb{R}^+)$ con $s \geq \frac{3}{4}$. Como es bien conocido, además de la ecuación KdV, existen diversos modelos que describen fenómenos relacionados con el análisis de la dinámica de un fluido irrotacional incompresible, bien sea en un dominio acotado o en un semiplano, como la "buena" ecuación de Boussinesq y la ecuación generalizada de Benney-Luke. La buena colocación local de **IBVP** para la "buena ecuación de Boussinesq"

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + \left(u^2\right)_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) &= h(x), \end{cases} \tag{2}$$

fue establecido por R. Xue en [10] utilizando el principio de la contracción y una técnia de la transformada de Laplace, como la utilizada por J. Bona, S. Sun, y B. Zhang en [6] en el caso del **IBVP** para la ecuación KdV. Más exactamente, se obtuvo la buena colocación local para datos iniciales $(f, h) \in H^s(\mathbb{R}^+) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^+)$ y condición de frontera $(h_1, h_2) \in H^{\frac{s}{2}+\frac{1}{4}}(\mathbb{R}^+) \times H^{\frac{s}{2}-\frac{3}{4}+\epsilon}(\mathbb{R}^+)$, bajo algunas condiciones de compatibilidad por $s > \frac{1}{2}$ y $\epsilon > 0$ pequeños. Más aún, la buena colocación global fué establecida en el caso de dato de frontera cero y condiciones iniciales $(f, h) \in H_0^s(\mathbb{R}^+) \times H_0^{s-1}(\mathbb{R}^+)$ para $s \geq 1$ con $\|f\|_{H_0^1(\mathbb{R}^+)} + \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$ pequeño.
En éste trabajo de investigación se considerará el **IBVP** asociado a la ecuación generalizada de Benney-Luke en el primer cuadrante

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + a u_{xxxx} - b u_{xxtt} + p u_t u_x^{p-1} u_{xx} + 2 u_x^p u_{xt} &= 0, \ x > 0, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = h_1(t), \quad u_t(0,t) &= h_2(t) \\ u_x(x,0) = f_1(x), \quad u_t(x,0) &= f_2(x), \end{cases} \tag{3}$$

donde las funciones f_i y h_i pertenecen a espacios apropiados de tipo Sobolev. Para $p = 1$, esta ecuación es una aproximación formalmente válida para la descripción de ondas de agua de profundidad finita, de pequeña amplitud y de gran elongación. Esta ecuación es una versión tridimensional del modelo derivado por J. Quintero y R. Pego en [3] como un modelo isotrópico para ondas de agua tridimensionales, donde los parámetros $a, b > 0$ son tales que $a - b = \sigma - \frac{1}{3}$, siendo σ el inverso del número Bond (asociado con la tensión superficial). A lo largo del trabajo se asumirá que $0 < b < a$, lo cual corresponde a una tensión superficial pequeña o cero ($\sigma > \frac{1}{3}$). En contraste con las ecuaciones de un solo sentido, como la KdV o la BBM, señalamos que el modelo (3) es una aproximación válida para describir formalmente propagación de ondas de agua en dos sentidos. La buena colocación local del **IVP** para la ecuación de Benney-Luke (3) fue obtenida por J. Quintero en [2] con los datos iniciales (u_0, u_1) tal que $u_0 \in \dot{H}^{s+1} = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : f' \in H^s(\mathbb{R})\}$ y $u_1 \in H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq s(p)$, donde $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ denota el espacio de distribuciones en $\mathbb{R}$. Para $p = 1$, se puede ver que $s(p) = 1$. En particular, si u es una solución local en $[0, T]$ tenemos que

$$u_x \in C([0,T], H^s(\mathbb{R})), \quad u_t \in C([0,T], H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R})).$$

El resultado sigue los argumentos estándar usando la teoría de semigrupos y la existencia de un efecto suavizante sobre la parte no lineal. La buena colocación global del **IVP** para la ecuación de Benney-Luke (3) se estableció utilizando el hecho de que la estructura hamiltoniana asociada con la ecuación de Benney-Luke se conserva en el tiempo para soluciones suaves.

Para el caso de este trabajo de investigación, el objetivo es demostrar que el **IBVP** (3) para $0 < a < b$ está localmente bien puesto para datos iniciales $(f_1, f_2) \in H^s(\mathbb{R}^+) \times H^s(\mathbb{R}^+)$ y datos de frontera $(h_1, h_2) \in H^{r_1(s)}(\mathbb{R}^+) \times H^{r_2(s)}(\mathbb{R}^+)$, donde $r_1(s)$ y $r_2(s)$ son exponentes apropiados con $s \in \mathbb{R}$. Los resultados de la buena colocación para el **IBVP** asociado con la ecuacuón de Benney-Luke (3) en el primer cuadrante $(x \geq 0, t \geq 0)$ serán obtenidos siguiendo la misma estrategia empleada por Bona, Sun y Zhang [6] en el **IBVP** para la ecuación Korteweg-de Vries, y por Xue [10] en el **IBVP** para la "buena" ecuación de Boussinesq.

Este trabajo está dividido en tres capítulos. En el primer capítulo se reescribe el **IBVP** (3) como un **IBVP** de primer orden, el cual se divide en tres subproblemas lineales homogéneos: dos **IBVP** y un **IVP**. En los tres subproblemas se encuentran soluciones explícitas y estimativos de dichas soluciones, el primer **IBVP** y el **IVP** se resuelven vía transformada de Laplace y Fourier, respectivamente, el segundo **IBVP** como una combinación de los dos anteriores. En el segundo capítulo se utilizan los resultados del primer capítulo para determinar un estimativo del **IBVP** lineal homogéneo asociado con datos iniciales $(f_1, f_2) \in H^s(\mathbb{R}^+) \times H^s(\mathbb{R}^+)$ y datos de frontera $(h_1, h_2) \in H^{r_1(s)}(\mathbb{R}^+) \times H^{r_2(s)}(\mathbb{R}^+)$. En el tercer capítulo se utiliza la descripción de las soluciones vía el principio de Duhamel, se obtiene un resultado de la buena colocación para el problema homogéneo no lineal como consecuencia del principio de contraccción en un espacio apropiado Z^s_T, y finalmente se realizan los estimativos no lineales para obtener un resultado de buena colocación para el problema **IBVP** no lineal asociado con (3).

Capítulo 1

Notaciones y preliminares

En este capítulo plantearemos algunas notaciones básicas y algunos resultados importantes utilizados en el dearrollo del trabajo.
Sean $H^s(\mathbb{R}), \mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$ y $\dot{H}^s(\mathbb{R})$ espacios tipo Sobolev definidos como

$$\begin{aligned} H^s(\mathbb{R}) &= \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : (1+|\zeta|)^s \hat{f}(\zeta) \in L^2(\mathbb{R})\}, \\ \mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}) &= \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : |\zeta|^\alpha (1+|\zeta|)^{\beta-\alpha} \hat{f}(\zeta) \in L^2(\mathbb{R})\}, \\ \dot{H}^s(\mathbb{R}) &= \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : |\zeta|^s \hat{f}(\zeta) \in L^2(\mathbb{R})\}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ denota el espacio de distribuciones sobre $\mathbb{R}$ y $\hat{f}$ denota la transformada de Fourier con respecto a la variable espacial x.
Ahora para $s \geq 0$, se definen los espacios $H^s(\mathbb{R}^+)$ y $\dot{H}^s(\mathbb{R}^+)$ como

$$H^s(\mathbb{R}^+) = \{f = F|_{\mathbb{R}^+} : F \in H^s(\mathbb{R})\}, \quad \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} = \text{ínf}\{\|F\|_{H^s(\mathbb{R})} : f = F|_{\mathbb{R}^+}\} \tag{1.1}$$

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^+) = \{f = F|_{\mathbb{R}^+} : F \in \dot{H}^s(\mathbb{R})\}, \quad \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^+)} = \text{ínf}\{\|F\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R})} : f = F|_{\mathbb{R}^+}\} \tag{1.2}$$

Note que para $f \in H^s(\mathbb{R})$, se tiene que $f|_{\mathbb{R}^+} \in H^s(\mathbb{R}^+)$ y $\|f|_{\mathbb{R}^+}\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \leq \|f|_{\mathbb{R}}\|_{H^s(\mathbb{R})}$.
Para $s < 0$, $H^s(\mathbb{R}^+)$ y $\dot{H}^s(\mathbb{R}^+)$ denotan los espacios de las transformaciones lineales acotadas g definidas sobre $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ con normas

$$\|g\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} = \sup\{|g(f)| : f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+) \text{ and } \|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^+)} = 1\}$$

y

$$\|g\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^+)} = \sup\{|g(f)| < \infty, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+) \text{ and } \|f\|_{\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^+)} = 1\},$$

respectivamente.
Finalmente, para $s \in \mathbb{R}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se definen los espacios

$$
\begin{aligned}
H_0^s(\mathbb{R}^+) &= \{f \in H_0^s(\mathbb{R}) : supp(f) \subset [0,\infty)\} \\
\dot{H}_0^s(\mathbb{R}^+) &= \{f \in \dot{H}_0^s(\mathbb{R}) : supp(f) \subset [0,\infty)\} \\
\mathcal{H}_0^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+) &= \{f \in \mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}) : supp(f) \subset [0,\infty)\}
\end{aligned}
$$

El siguiente lema resume los resultados obtenidos por R. Xue en [10] respecto a estos espacios (ver lemas 2.1, 2.2 y 2.3 en [10]).
Lema 1.0.1. *1. Para $s < 0$, se tiene que $\dot{H}^s(\mathbb{R}^+) = \dot{H}_0^s(\mathbb{R}^+)$.*

2. *Para $s \leq \frac{1}{2}$, se tiene que $H^s(\mathbb{R}^+) = H_0^s(\mathbb{R}^+)$.*

3. *Para $k + \frac{1}{2} < s \leq k + \frac{3}{2}$ con k entero no negativo, se tiene que*

$$H_0^s(\mathbb{R}^+) = \{f \in H^s(\mathbb{R}) : Tr(\partial_x^j f) = 0,\ j : 0, 1, ...k\}.$$

donde $Tr(\partial_x^j f) = \partial_x^j F$ para $F \in H^s(\mathbb{R})$ y $f = F|_{\mathbb{R}^+}$.

4. *Para $\alpha < 0$ y $\beta \leq \frac{1}{2}$ con $\alpha \leq \beta$, se tiene que $\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+) = \mathcal{H}_0^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+)$.*

5. *Para $\alpha < 0$ y $k + \frac{1}{2} < \beta \leq k + \frac{3}{2}$ con k entero, se tiene que*

$$\mathcal{H}_0^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+) = \{f \in \mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+) : Tr(\partial_x^j f) = 0,\ j : 0, 1, ...k\}.$$

donde $Tr(\partial_x^j f) = \partial_x^j F$ para $F \in H^\beta(\mathbb{R})$ and $f = F|_{\mathbb{R}^+}$.

Para efectos del trabajo se definen los conjuntos $Y^l(A)$, $Y_0^l(A)$ y $Y^{\alpha,\beta}$, para $l \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y $A = \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^+$, con sus respectivas normas, como

$$
\begin{aligned}
Y^l(A) &= H^l(A) \times H^l(A), \quad \|(q,r)\|_{Y^l(A)} = \|q\|_{H^l(A)} + \|r\|_{H^l(A)}, \\
Y_0^l(A) &= H_0^l(A) \times H_0^l(A), \quad \|(q,r)\|_{Y_0^l(A)} = \|q\|_{H_0^l(A)} + \|r\|_{H_0^l(A)}, \\
Y^{\alpha,\beta}(A) &= \mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+), \quad \|(q,r)\|_{Y^{\alpha,\beta}(A)} = \|q\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+)} + \|r\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^+)}.
\end{aligned}
$$

Capítulo 2

IBVP lineal homogéneo: casos particulares

En este capítulo se reescribe la ecuación de Benney-Luke (3) como una ecuación de primer orden y se estudia el **IBVP** homogéneo asociado. Para esto se consideran las variables $q = u_x$ y $r = u_t$, de donde $q_t = r_x$, y la ecuación en (3) puede expresarse como

$$r_t - q_x + aq_{xxx} - br_{xxt} + prq^{p-1}q_x + 2q^p r_x = 0,$$

o equivalentemente como,

$$(I - b\partial_x^2)r_t - (I - a\partial_x^2)q_x + prq^{p-1}q_x + 2q^p r_x = 0.$$

Si se consideran los operadores lineales $A = I - a\partial_x^2$ y $B = I - b\partial_x^2$, entonces se tiene que r satisface la ecuación

$$r_t = B^{-1}Aq_x - B^{-1}(prq^{p-1}q_x + 2q^p r_x).$$

Luego, el **IBVP** (3) puede ser escrito como un **IBVP** de primer orden

$$\begin{cases} q_t &= r_x, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ r_t &= B^{-1}Aq_x - B^{-1}(prq^{p-1}q_x + 2q^p r_x) \\ q(0,t) &= h_1(t), \quad r(0,t) = h_2(t) \\ q(x,0) &= f_1(x), \quad r(x,0) = f_2(x), \end{cases}$$

o equivalentemente como

$$\begin{cases} \partial_t X(x,t) &= MX(x,t) + G(q,r)(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ X(0,t) &= \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}, \quad X(x,0) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde X, M y G están dados por

$$X = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ (B^{-1}A)\partial_x & 0 \end{pmatrix}, \ G(q,r)(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -B^{-1}(prq^{p-1}q_x + 2q^p r_x) \end{pmatrix}.$$

Observación 2.0.1. *Si se consideran las variables $q = u_x$ y $r = u_t$, la cantidad*

$$\mathcal{M}(q)(x,t) = \int_{\mathbb{R}} q(t,x)\, dx$$

se conserva en el tiempo para soluciones clásicas y para soluciones suaves, siempre que la solución exista y $r(0,t) = 0$. Por lo tanto, si se considera el problema de Cauchy asociado con el sistema en la variable (q,r) con dato inicial $q_0 \in H^s(\mathbb{R}^+)$, que cumpla la propiedad de la media cero

$$\int_0^\infty q_0(x)\, dx = 0,$$

se tiene, siempre que la solución exista para t, que

$$\int_0^\infty q(x,t)\, dx = 0.$$

Lo anterior significa que $q(\cdot,t) \in H^s(\mathbb{R}^+)$ y cumple la propiedad de la media cero, siempre que la solución exista para t. En este caso, la función u es tal que $u(x,t) = \partial_x^{-1} q(x,t) \in \mathcal{V}^{s+1}$ con $q(x,t) = u_x(x,t)$ y $r(x,t) = u_t(x,t)$, donde

$$\mathcal{V}^{s+1} = \{f \in \mathcal{S} : f_x \in H^s(\mathbb{R}^+)\}, \qquad \partial_x^{-1}(f)(x) = \int_0^x f(y)\, dy.$$

Por esta razón, el trabajo se centra en la buena colocación local y global para el problema de Cauchy asociado con el sistema en la variable (q,r), y se establece la buena colocación global para el problema de Cauchy asociado al modelo de Benney-Luke en el caso de condiciones de frontera homogeneas ($h_1 = h_2 = 0$).

Ahora, para estudiar el caso lineal homogeneo ($G \equiv 0$), se considera el sistema

$$\begin{cases} \partial_t X(x,t) &= MX(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ X(0,t) &= \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}, \quad X(x,0) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.2}$$

El análisis de este **IBVP** se divide en tres subproblemas. En primer lugar, se determina la solución $W_b(h_1,h_2)$ del **IBVP** sobre la semirecta

$$\begin{cases} \partial_t X(x,t) &= MX(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ X(0,t) &= \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}, \quad X(x,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

para datos de frontera $(h_1,h_2)\in Y_0^{s-\frac{3}{2},s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$ y valores iniciales cero. En segundo lugar, se determina la solución $W_R(f_1,f_2)$ del **IVP** sobre la recta real

$$\begin{cases} \partial_t X(x,t) &= MX(x,t), \quad x\in\mathbb{R}, \quad t>0,\\ X(x,0) &= \begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}, \end{cases}$$

para valores iniciales $(f_1,f_2)\in Y^s(\mathbb{R})$. Y en tercer lugar, se determina la solución $W_C(f_1,f_2)$ del **IBVP** sobre la semirecta

$$\begin{cases} \partial_t X(x,t) &= MX(x,t), \quad x>0, \quad t>0,\\ X(0,t) &= \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}, \quad X(x,0)=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}, \end{cases}$$

para valores iniciales $(f_1,f_2)\in Y_0^s(\mathbb{R}^+)$ y datos de frontera cero. Además de las soluciones explícitas se obtienen estimativos lineales para cada subproblema.
Note que la función

$$W(f_1,f_2,h_1,h_2)=W_b(h_1,h_2)+W_C(f_1,f_2)$$

es solución del **IBVP** (2.2) para datos iniciales $(f_1,f_2)\in Y_0^s(\mathbb{R}^+)$ y de frontera $(h_1,h_2)\in Y_0^{s-\frac{3}{2},s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$. En el tercer capítulo se hacen modificaciones apropiadas, como lo hizo Xue en [10], para obtener un estimativo lineal para el **IBVP** (2.2) con valores iniciales $(f_1,f_2)\in Y^s(\mathbb{R}^+)$ y datos de frontera $(h_1,h_2)\in Y^{s-\frac{3}{2},s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$.

2.1. IBVP lineal homogéneo : caso $f_1\equiv f_2\equiv 0$

En esta sección se estudia el **IBVP** lineal homogéneo cuando $f_1\equiv f_2\equiv 0$, $x>0$ y $t>0$, esto es,

$$\begin{cases} \partial_t X(x,t) &= MX(x,t), \quad x>0, \quad t>0,\\ X(0,t) &= \begin{pmatrix} h_1(t)\\ h_2(t)\end{pmatrix}, \quad X(x,0)=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Para este caso se utilizará la técnica de la transformada de Laplace con respecto a la variable tiempo t, la cual consiste en pasar el problema original a un problema dual via transformada de Laplace, obtener una solución explícita del nuevo problema y así obtener una solución explícita del problema original utilizando la trasformada inversa.

Lema 2.1.1. *Para cada* $h_1, h_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, *la solución* $W_b(h_1,h_2)$ *del* **IBVP** *lineal homogeneo (2.3) tiene la fórmula explícita*

$$X(x,t) = W_b(h_1,h_2)(x,t) = \begin{pmatrix} U_1(x,t) + U_2(x,t) + \overline{U_1(x,t)} + \overline{U_2(x,t)} \\ V_1(x,t) + V_2(x,t) + \overline{V_1(x,t)} + \overline{V_2(x,t)} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

donde U_i *y* V_i *están dados por* $s(\mu) = \sqrt{\frac{a\mu^2-1}{1-b\mu^2}}$ *como*

$$U_1(x,t) = \frac{-a}{2\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \rho_1(x,t,\mu)\,d\mu, \qquad U_2(x,t) = \frac{-\sqrt{a}}{2\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \rho_2(x,t,\mu)\,d\mu,$$
$$V_1(x,t) = \frac{-a}{2\pi i}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} s(\mu)\rho_1(x,t,\mu)\,d\mu, \qquad V_2(x,t) = \frac{-a}{2\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \mu\rho_2(x,t,\mu)\,d\mu,$$

donde,

$$\rho_1(x,t,\mu) = \frac{e^{i\mu s(\mu)t}e^{-\mu x}s(\mu)\rho_3(\mu)}{(a\mu^2-1)}\left(\int_0^\infty \left(\mu h_1(\xi) - \frac{h_2(\xi)}{\sqrt{a}}\right)e^{-i\mu s(\mu)\xi}\,d\xi\right)$$
$$\rho_2(x,t,\mu) = \frac{e^{i\mu s(\mu)t}e^{\frac{is(\mu)x}{\sqrt{a}}}s(\mu)\rho_3(\mu)}{(a\mu^2-1)}\left(\int_0^\infty (is(\mu)h_1(\xi) + h_2(\xi))\,e^{-i\mu s(\mu)\xi}\,d\xi\right)$$
$$\rho_3(\mu) = \left(\mu - \frac{is(\mu)}{\sqrt{a}}\right).$$

Demostración. Si aplicamos la transformada de Laplace con respecto a t al **IBVP** lineal (2.3), obtenemos el siguiente **IBVP** lineal:

$$\begin{cases} \lambda\widetilde{q}(x,\lambda) &= \widetilde{r}_x(x,\lambda), \qquad\qquad Re(\lambda) > 0,\ x > 0, \\ \lambda\widetilde{r}(x,\lambda) &= B^{-1}A\widetilde{q}_x(x,\lambda), \\ \widetilde{q}(0,\lambda) &= \widetilde{h}_1(\lambda), \quad \widetilde{r}(0,\lambda) = \widetilde{h}_2(\lambda), \\ \partial_x^j\widetilde{q}(+\infty,\lambda) &= \partial_x^j\widetilde{r}(+\infty,\lambda) = 0, \qquad j = 0,1, \end{cases} \tag{2.5}$$

donde λ es la variable dual de t y $\widetilde{q}(x,\lambda), \widetilde{r}(x,\lambda), \widetilde{h}_1(\lambda), \widetilde{h}_2(\lambda)$ son las transformadas de Laplace de $q(x,t), r(x,t), h_1(t), h_2(t)$ con respecto a t, respectivamente. Del sistema de ecuaciones obtenido en (2.5) se tiene que:

$$\begin{aligned} \lambda\widetilde{r} &= B^{-1}A\widetilde{q}_x \\ \lambda\widetilde{r}_x &= B^{-1}A\widetilde{q}_{xx} \\ \lambda^2\widetilde{q} &= B^{-1}A\widetilde{q}_{xx} \\ \lambda^2 B\widetilde{q} &= A\widetilde{q}_{xx} \\ \lambda^2\widetilde{q} - b\lambda^2\widetilde{q}_{xx} &= \widetilde{q}_{xx} - a\widetilde{q}_{xxxx} \\ a\widetilde{q}_{xxxx} - (1+b\lambda^2)\widetilde{q}_{xx} + \lambda^2\widetilde{q} &= 0. \end{aligned}$$

Una solución general de la última ecuación es

$$\widetilde{q}(x,\lambda) = c_1 e^{\gamma_{1A}x} + c_2 e^{\gamma_{2A}x} + c_3 e^{\gamma_{3A}x} + c_4 e^{\gamma_{4A}x},$$

donde

$$\gamma_{1A,2A} = -\sqrt{\frac{(1+b\lambda^2) \pm \sqrt{(1+b\lambda^2)^2 - 4a\lambda^2}}{2a}}, \quad \gamma_{3A} = -\gamma_{2A}, \quad \gamma_{4A} = -\gamma_{1A},$$

son las cuatro raices del polinomio característico

$$a\gamma^4 - (1+b\lambda^2)\gamma^2 + \lambda^2 = 0, \quad \lambda \in A = \{\omega : \Re(\omega) > \lambda_+\}, \tag{2.6}$$

con

$$\lambda_\pm = \frac{\sqrt{2a - b \pm 2\sqrt{a(a-b)}}}{b} > 0,$$

ordenadas de manera que $Re(\gamma_{1A}) < 0$, $Re(\gamma_{2A}) < 0$, $Re(\gamma_{3A}) > 0$, y $Re(\gamma_{4A}) > 0$. Además, γ_{iA} es analítica para $Re(\lambda) > \lambda_+$ y continua para $Re(\lambda) \geq \lambda_+$, excepto en $\lambda = \lambda_+$, para $i = 1, 2, 3, 4$.
De las condiciones $\partial_x^j \widetilde{q}(+\infty, \lambda) = 0$ para $j = 0, 1$, se tiene que $c_3 = c_4 = 0$ y por lo tanto

$$\widetilde{q}(x,\lambda) = c_1 e^{\gamma_{1A}x} + c_2 e^{\gamma_{2A}x}.$$

De manera similar, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lambda \widetilde{q} &= \widetilde{r}_x \\
\lambda \widetilde{q}_x &= \widetilde{r}_{xx} \\
\lambda B^{-1} A \widetilde{q}_x &= B^{-1} A \widetilde{r}_{xx} \\
\lambda^2 \widetilde{r} &= B^{-1} A \widetilde{r}_{xx} \\
\lambda^2 B \widetilde{r} &= A \widetilde{r}_{xx} \\
\lambda^2 \widetilde{r} - b\lambda^2 \widetilde{r}_{xx} &= \widetilde{r}_{xx} - a\widetilde{r}_{xxxx} \\
a\widetilde{r}_{xxxx} - (1+b\lambda^2)\widetilde{r}_{xx} + \lambda^2 \widetilde{r} &= 0,
\end{aligned}$$

de donde $\widetilde{r}$ puede ser expresado como

$$\widetilde{r}(x,\lambda) = d_1 e^{\gamma_{1A}x} + d_2 e^{\gamma_{2A}x}.$$

Ahora, de (2.5) también se tiene que $\lambda \widetilde{q}(x,\lambda) = \widetilde{r}_x(x,\lambda)$, esto es,

$$c_1 \lambda e^{\gamma_{1A}x} + c_2 \lambda e^{\gamma_{2A}x} = d_1 \gamma_{1A} e^{\gamma_{1A}x} + d_2 \gamma_{2A} e^{\gamma_{2A}x},$$

así, por la independencia lineal de $e^{\gamma_{1A}x}$ y $e^{\gamma_{2A}x}$ podemos concluir que

$$c_1 = \frac{\gamma_{1A}}{\lambda} d_1 \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{\gamma_{2A}}{\lambda} d_2. \tag{2.7}$$

Luego, si se reemplazan c_1 y c_2 en las condiciones iniciales de (2.5) se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1A} & \gamma_{2A} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\widetilde{h}_1 \\ \widetilde{h}_2 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -\gamma_{2A} \\ -1 & \gamma_{1A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\widetilde{h}_1 \\ \widetilde{h}_2 \end{pmatrix},$$

esto es

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\gamma_{1A} - \gamma_{2A}}(\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_{2A}\widetilde{h}_2) \\ d_2 &= \frac{1}{\gamma_{1A} - \gamma_{2A}}(\gamma_{1A}\widetilde{h}_2 - \lambda\widetilde{h}_1). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Luego, reemplazando (2.8) en (2.7) se tiene que

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\gamma_{1A}}{\lambda(\gamma_{1A} - \gamma_{2A})}(\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_{2A}\widetilde{h}_2) \\ c_2 &= \frac{\gamma_{2A}}{\lambda(\gamma_{1A} - \gamma_{2A})}(\gamma_{1A}\widetilde{h}_2 - \lambda\widetilde{h}_1). \end{aligned}$$

De este modo, $\widetilde{q}$ y $\widetilde{r}$ se pueden escribir de forma explícita como

$$\widetilde{q}(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda(\gamma_{1A} - \gamma_{2A})}\big[\gamma_{1A}(\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_2\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1A}x} - \gamma_2(\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_1\widetilde{h}_2)e^{\gamma_2 x}\big], \tag{2.9}$$

$$\widetilde{r}(x,\lambda) = \frac{1}{\gamma_{1A} - \gamma_{2A}}\big[(\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_{2A}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1A}x} - (\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_1\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2A}x}\big]. \tag{2.10}$$

Así, para p fijo con $Re(p) > \lambda_+$ y

$$\Gamma_A(\lambda) = \frac{(\gamma_{1A} + \gamma_{2A})}{2\pi i(\gamma_{1A}^2 - \gamma_{2A}^2)}e^{\lambda t},$$

se tienen las siguientes representaciones de q y r para $x > 0$ y $t > 0$,

$$q(x,t) = \int\limits_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{\Gamma_A(\lambda)}{\lambda}\big[\gamma_{1A}(\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_{2A}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1A}x} - \gamma_{2A}(\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_{1A}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2A}x}\big]d\lambda, \tag{2.11}$$

$$r(x,t) = \int\limits_{p-i\infty}^{p+i\infty} \Gamma_A(\lambda)\big[(\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_{2A}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1A}x} - (\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_{1A}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2A}x}\big]d\lambda. \tag{2.12}$$

Ahora, observe que

$$|\gamma_{1A}^2 - \gamma_{2A}^2| = \left|\frac{\sqrt{(1+b\lambda^2)^2 - 4a\lambda^2}}{a}\right| = b\frac{\sqrt{|\lambda - \lambda_+||\lambda + \lambda_+||\lambda^2 - \lambda_-^2|}}{a},$$

entonces $|\gamma_{1A}^2 - \gamma_{2A}^2| = O(|\lambda - \lambda_+|^{\frac{1}{2}})$ cuando $\lambda \to \lambda_+$ con $Re(\lambda) > \lambda_+$. Más aún, para constantes positivas C_1 y C_2 con $C_1 < Re(\lambda) < C_2$, observe que

$$\gamma_{1A,2A} = \frac{-\sqrt[4]{(1+b\lambda^2)^2 - 4a\lambda^2}}{\sqrt{2a}} \sqrt{\frac{(1+b\lambda^2)}{\sqrt{(1+b\lambda^2)^2 - 4a\lambda^2}} \pm 1},$$

luego, cuando $|\lambda| \to \infty$, se tiene que

$$\gamma_{1A} \to \frac{-\sqrt[4]{(1+b\lambda^2)^2 - 4a\lambda^2}}{\sqrt{2a}}, \qquad \gamma_{2A} \to \frac{-i\sqrt[4]{(1+b\lambda^2)^2 - 4a\lambda^2}}{\sqrt{2a}}.$$

Utilizando estos estimativos, se tiene que cuando $p \to \lambda_+$ en (2.11) y (2.12),

$$q(x,t) = \int\limits_{\lambda_+ - i\infty}^{\lambda_+ + i\infty} \frac{\Gamma_A(\lambda)}{\lambda} \big[\gamma_{1A}(\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_{2A}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1A}x} - \gamma_{2A}(\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_{1A}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2A}x}\big] d\lambda, \tag{2.13}$$

$$r(x,t) = \int\limits_{\lambda_+ - i\infty}^{\lambda_+ + i\infty} \Gamma_A(\lambda)\big[(\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_{2A}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1A}x} - (\lambda\widetilde{h}_1 - \gamma_{1A}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2A}x}\big] d\lambda. \tag{2.14}$$

Ahora, sea γ_{iB} con $i = 1, 2, 3, 4$, las cuatro raices del polinomio característico

$$a\gamma^4 - (1+b\lambda^2)\gamma^2 + \lambda^2 = 0, \quad \lambda \in B = \{\omega : \lambda_- < Re(\omega) < \lambda_+\}. \tag{2.15}$$

ordenadas de manera que $Re(\gamma_{1B}) < 0$, $Re(\gamma_{2B}) < 0$, $Re(\gamma_{3B}) > 0$ y $Re(\gamma_{4B}) > 0$. Además, γ_{iB} es analítica para $\lambda_- < Re(\lambda) < \lambda_+$ y continua para $\lambda_- \le Re(\lambda) \le \lambda_+$, excepto en $\lambda = \lambda_\pm$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Usando la unicidad y continuidad de las raices del polinomio característico $a\gamma^4 - (1+b\lambda^2)\gamma^2 + \lambda^2 = 0$ en las semirectas $\Gamma_+ = \{\omega : Re(\omega) = \lambda_+,\ \Im(\omega) > 0\}$ y $\Gamma_- = \{\omega : Re(\omega) = \lambda_-,\ \Im(\omega) < 0\}$, y asumiendo sin pérdida de generalidad que

$$\gamma_{1A} = \gamma_{1B}, \quad \gamma_{2A} = \gamma_{2B}, \quad \lambda \in \Gamma_+,$$

entonces se tiene que

$$\gamma_{1A} = \gamma_{1B}, \quad \gamma_{2A} = \gamma_{2B}, \quad \lambda \in \Gamma_-, \quad \text{o} \quad \gamma_{2A} = \gamma_{1B}, \quad \gamma_{1A} = \gamma_{2B}, \quad \lambda \in \Gamma_-.$$

Por la simetría de las fórmulas (2.13), (2.14) y para

$$\Gamma_B(\lambda) = \frac{(\gamma_{1B} + \gamma_{2B})}{2\pi i(\gamma_{1B}^2 - \gamma_{2B}^2)} e^{\lambda t},$$

se concluye que

$$q(x,t)=\int\limits_{\lambda_+-i\infty}^{\lambda_++i\infty}\frac{\Gamma_B(\lambda)}{\lambda}\big[\gamma_{1B}(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{2B}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1B}x}-\gamma_{2B}(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{1B}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2B}x}\big]d\lambda, \tag{2.16}$$

$$r(x,t)=\int\limits_{\lambda_+-i\infty}^{\lambda_++i\infty}\Gamma_B(\lambda)\big[(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{2B}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1B}x}-(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{1B}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2B}x}\big]d\lambda. \tag{2.17}$$

De manera similar como se hizo para $\lambda\in A$, se tiene para $\lambda\in B$ que

$$\begin{aligned}|\gamma_{1B}^2-\gamma_{2B}^2|&=O(|\lambda-\lambda_+|^{\frac{1}{2}}),\quad \lambda\to\lambda_+,\quad \lambda_-<Re(\lambda)<\lambda_+.\\ |\gamma_{1B}-\gamma_{2B}|&=O(\sqrt{(1+b\lambda^2)^2-4a\lambda^2}),\quad \lambda\to\lambda_-,\quad \lambda_-<Re(\lambda)<\lambda_+.\\ \gamma_{1B}&\to-\sqrt[4]{(1+b\lambda^2)^2-4a\lambda^2},\quad |\lambda|\to\infty,\quad \lambda\in B.\\ \gamma_{2B}&\to-i\sqrt[4]{(1+b\lambda^2)^2-4a\lambda^2},\quad |\lambda|\to\infty,\quad \lambda\in B.\end{aligned}$$

De este modo, usando el teorema de Cauchy con respecto a la región B, se pueden escribir q y r como

$$q(x,t)=\int\limits_{\lambda_--i\infty}^{\lambda_-+i\infty}\frac{\Gamma_B(\lambda)}{\lambda}\big[\gamma_{1B}(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{2B}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1B}x}-\gamma_{2B}(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{1B}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2B}x}\big]d\lambda, \tag{2.18}$$

$$r(x,t)=\int\limits_{\lambda_--i\infty}^{\lambda_-+i\infty}\Gamma_B(\lambda)\big[(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{2B}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1B}x}-(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{1B}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2B}x}\big]d\lambda. \tag{2.19}$$

Del mismo modo, realizando estimaciones similares y usando el Teorema de Cauchy con respecto a la región $C=\{\omega:0<Re(\omega)<\lambda_-\}$, se pueden escribir q y r como

$$q(x,t)=\int\limits_{0-i\infty}^{0+i\infty}\frac{\Gamma_C(\lambda)}{\lambda}\big[\gamma_{1C}(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{2C}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1C}x}-\gamma_{2C}(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{1C}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2C}x}\big]d\lambda, \tag{2.20}$$

$$r(x,t)=\int\limits_{0-i\infty}^{0+i\infty}\Gamma_C(\lambda)\big[(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{2C}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1C}x}-(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{1C}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2C}x}\big]d\lambda. \tag{2.21}$$

Ahora, si se denota U_1 y U_2 como

$$U_1(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{0+i0}^{0+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda(\gamma_{1C}^2-\gamma_{2C}^2)}\big[\gamma_{1C}(\gamma_{1C}+\gamma_{2C})(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{2C}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1C}x}\big]d\lambda$$

$$U_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{0+i0}^{0+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda(\gamma_{1C}^2-\gamma_{2C}^2)}\big[\gamma_{2C}(\gamma_{1C}+\gamma_{2C})(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{1C}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2C}x}\big]d\lambda.$$

entonces

$$\begin{aligned}\overline{U_1(x,t)} &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{0+i0}^{0-i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda(\gamma_{1C}^2-\gamma_{2C}^2)}\big[\gamma_{1C}(\gamma_{1C}+\gamma_{2C})(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{2C}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1C}x}\big]d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{0-i\infty}^{0+i0} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda(\gamma_{1C}^2-\gamma_{2C}^2)}\big[\gamma_{1C}(\gamma_{1C}+\gamma_{2C})(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{2C}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1C}x}\big]d\lambda\end{aligned}$$

y de manera similar

$$\overline{U_2(x,t)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{0-i\infty}^{0+i0} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda(\gamma_{1C}^2-\gamma_{2C}^2)}\big[\gamma_{2C}(\gamma_{1C}+\gamma_{2C})(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{1C}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2C}x}\big]d\lambda.$$

Por lo tanto, para $x, t > 0$ se tiene que

$$q(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x,t) + \overline{U_1(x,t)} + \overline{U_2(x,t)}. \tag{2.22}$$

Como se hizo para q, se puede calcular de manera similar una fórmula explícita para r. En este caso, si se definen las funciones V_1 y V_2 como

$$V_1(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{0+i0}^{0+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\gamma_{1C}^2-\gamma_{2C}^2}\big[(\gamma_{1C}+\gamma_{2C})(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{2C}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{1C}x}\big]d\lambda \tag{2.23}$$

$$V_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{0-i0}^{0+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\gamma_{1C}^2-\gamma_{2C}^2}\big[(\gamma_{1C}+\gamma_{2C})(\lambda\widetilde{h}_1-\gamma_{1C}\widetilde{h}_2)e^{\gamma_{2C}x}\big]d\lambda, \tag{2.24}$$

se tiene que para $x, t > 0$,

$$r(x,t) = V_1(x,t) + V_2(x,t) + \overline{V_1(x,t)} + \overline{V_2(x,t)}. \tag{2.25}$$

De este modo,

$$W_b(h_1,h_2)(x,t) = \begin{pmatrix} q(x,t) \\ r(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(x,t)+U_2(x,t)+\overline{U_1(x,t)}+\overline{U_2(x,t)} \\ V_1(x,t)+V_2(x,t)+\overline{V_1(x,t)}+\overline{V_2(x,t)} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, si γ es una raiz del polinomio característico

$$am^4 - (1 + b\lambda^2)m^2 + \lambda^2 = 0,$$

entonces λ puede ser expresado como

$$\lambda^2 = \gamma^2 \left(\frac{a\gamma^2 - 1}{b\gamma^2 - 1} \right).$$

Si se define

$$\lambda = i\mu\sqrt{\frac{a\mu^2 - 1}{1 - b\mu^2}}$$

con $\frac{1}{\sqrt{a}} \leq \mu \leq \frac{1}{\sqrt{b}}$ $(a > b)$, entonces las cuatro raices del polinomio característico están dadas por

$$\gamma_1(\mu) = -\mu = -\gamma_3(\mu), \qquad \gamma_2(\mu) = \frac{i}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{a\mu^2 - 1}{1 - b\mu^2}} = -\gamma_4(\mu)$$

De este modo, la imagen de $s(\mu) = \sqrt{\frac{a\mu^2-1}{1-b\mu^2}}$ con $\frac{1}{\sqrt{a}} \leq \mu \leq \frac{1}{\sqrt{b}}$ es $[0, \infty)$. Luego, $\lambda = i\mu\sqrt{\frac{a\mu^2-1}{1-b\mu^2}} = i\mu s(\mu)$ recorre el eje imaginario desde cero hasta $+\infty$. Este cambio de variable es tal que

$$2\lambda\, d\lambda = \frac{2\mu(ab\mu^4 - 2a\mu^2 + 1)\, d\mu}{(1 - b\mu^2)^2}$$

de donde

$$d\lambda = \frac{i(ab\mu^4 - 2a\mu^2 + 1)\, d\mu}{(1 - b\mu^2)^{3/2}(a\mu^2 - 1)^{1/2}}.$$

Ademas también se tiene que

$$\gamma_2^2 - \gamma_1^2 = \frac{(ab\mu^4 - 2a\mu^2 + 1)}{a(1 - b\mu^2)}.$$

Por lo tanto, se concluye que

$$\frac{d\lambda}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} = \frac{ia\, d\mu}{(b\mu^2 - 1)^{1/2}(1 - a\mu^2)^{1/2}}$$

y que

$$\frac{d\lambda}{\lambda(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)} = -\frac{a\, d\mu}{\mu(a\mu^2 - 1)}.$$

Más aún,

$$\gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2) = -\mu\left(\mu - \frac{is(\mu)}{\sqrt{a}}\right), \quad \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2) = -\frac{is(\mu)}{\sqrt{a}}\left(\mu - \frac{is(\mu)}{\sqrt{a}}\right).$$

Luego, de la definición de U_1 y U_2, se tiene que

$$U_1(x,t) = \frac{-a}{2\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \rho_1(x,t,\mu)\, d\mu, \quad U_2(x,t) = \frac{-\sqrt{a}}{2\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \rho_2(x,t,\mu)\, d\mu,$$

con

$$\rho_1(x,t,\mu) = \frac{e^{i\mu s(\mu)t}e^{-\mu x}s(\mu)\rho_3(\mu)}{(a\mu^2-1)}\left(\int_0^\infty \left(\mu h_1(\xi) - \frac{h_2(\xi)}{\sqrt{a}}\right)e^{-i\mu s(\mu)\xi}\, d\xi\right)$$

$$\rho_2(x,t,\mu) = \frac{e^{i\mu s(\mu)t}e^{\frac{is(\mu)x}{\sqrt{a}}}s(\mu)\rho_3(\mu)}{(a\mu^2-1)}\left(\int_0^\infty (is(\mu)h_1(\xi) + h_2(\xi))\, e^{-i\mu s(\mu)\xi}\, d\xi\right)$$

$$\rho_3(\mu) = \left(\mu - \frac{is(\mu)}{\sqrt{a}}\right).$$

Las expresiones para V_i $(i = 1, 2)$ se obtienen de manera similar. $\square$

Lema 2.1.2. *Sea $s \geq 0$ y $W_b(h_1, h_2) = (q, r)^T$. Si $h_1 \in H_0^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)$ y $h_2 \in H_0^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$ entonces*

$$\sup_{t\geq 0} \|W_b(h_1,h_2)(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \leq C\left(\|h_1\|_{H_0^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|h_2\|_{H_0^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)}\right).$$

Demostración. Del lema anterior, basta estimar U_i y V_i con $i = 1, 2$, para obtener el resultado deseado. Para estimar U_1 se define el operador T_1 sobre $L^2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$ como

$$T_1(g)(x,t) = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} e^{i\mu s(\mu)t}e^{\gamma_1(\mu)x}g(\mu)d\mu.$$

Si se define g_1 y g_2 como

$$g_1(\mu) = \left(\frac{\mu s(\mu)(\sqrt{a}\mu - is(\mu))}{\sqrt{a}(a\mu^2-1)}\right)\left(\int_0^\infty h_1(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}\, d\xi\right)$$

y

$$g_2(\mu) = \left(\frac{s(\mu)(\sqrt{a}\mu - is(\mu))}{a(a\mu^2-1)}\right)\left(\int_0^\infty h_2(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}\, d\xi\right),$$

entonces se tiene que

$$U_1 = \frac{a}{2\pi}(T_1(g_1) - T_1(g_2)). \tag{2.26}$$

De este modo, si queremos estimar U_1 debemos estimar $T_1(g_1)$ y $T_1(g_2)$. Primero se establece un estimativo para $T_1(g)$ con $g \in L^2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \bigcap L^1\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$. Para $s \geq 0$ se escoge $n = [s] + 1$. Así, para $k = 0, 1, 2, ..., n$ se tiene que

$$\partial_x^k T_1(g)(x,t) = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} [\gamma_1(\mu)]^k e^{i\mu s(\mu)t}e^{\gamma_1(\mu)x}g(\mu)d\mu.$$

De la desigualdad integral de Minkowski se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x^k T_1(g)(\cdot,t)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^+)} &\le \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} |\gamma_1(\mu)|^k |e^{i\mu s(\mu)t}| \|e^{\gamma_1(\mu)x}\|_{L^2_x(\mathbb{R}^+)} |g(\mu)| d\mu \\
&\le \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} |\gamma_1(\mu)|^k \Big(\int_0^{+\infty} |e^{\gamma_1(\mu)x}|^2 dx \Big)^{1/2} |g(\mu)| d\mu \\
&\le \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} |\gamma_1(\mu)|^k \left(\frac{1}{2|Re(\gamma_1(\mu))|} \right)^{1/2} |g(\mu)| d\mu \qquad (2.27)\\
&\le \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} |\gamma_1(\mu)|^k \left(\frac{1}{2|\gamma_1(\mu)|} \right)^{1/2} |g(\mu)| d\mu \\
&\le C \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} |\gamma_1(\mu)|^{k-\frac{1}{2}} |g(\mu)| d\mu \\
&\le C \big\| \gamma_1^{k-\frac{1}{2}} g \big\|_{L^1(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})}.
\end{aligned}
$$

Usando (2.27) para $k=0$ se tiene que

$$
\|T_1(g)(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \le C \big\| |\gamma_1|^{-\frac{1}{2}} g \big\|_{L^1(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})}.
$$

Más aún,

$$
\begin{aligned}
\|T_1(g)(\cdot,t)\|_{H^n(\mathbb{R}^+)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \big\| \partial_x^k T_1(g)(\cdot,t) \big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \right)^{1/2} \\
&\le \left[\sum_{k=1}^{n} C \big\| \gamma_1^{k-\frac{1}{2}} g \big\|^2_{L^1(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})} \right]^{1/2} \\
&\le \left[nC \big\| \gamma_1^{n-\frac{1}{2}} g \big\|^2_{L^1(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})} \right]^{1/2} \\
&\le C \big\| \gamma_1^{n-\frac{1}{2}} g \big\|_{L^1(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})}.
\end{aligned}
$$

De este modo, por el anterior estimativo y por el Teorema de Interpolación de Calderon-Lions se concluye que

$$
\|T_1(g)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \le C \big\| |\gamma_1|^{s-\frac{1}{2}} g \big\|_{L^1(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})}. \qquad (2.28)
$$

Aplicando (2.28) para $g=g_1$ y $g=g_2$, se tiene respectivamente que

$$
\begin{aligned}
\|T_1(g_1)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} &\le C \big\| |\gamma_1|^{s-\frac{1}{2}} g_1 \big\|_{L^1(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})} \\
&\le C \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \mu^{s-\frac{1}{2}} |g_1(\mu)| d\mu \qquad (2.29)\\
&\le C \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \mu^{s+\frac{1}{2}} \sigma(\mu) \left| \int_0^{\infty} h_1(\xi) e^{-i\mu s(\mu)\xi} \, d\xi \right| d\mu
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\|T_1(g_2)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} &\leq C\left\||\gamma_1|^{s-\frac{1}{2}}g_2\right\|_{L^1(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})}\\
&\leq C\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\mu^{s-\frac{1}{2}}|g_2(\mu)|d\mu\\
&\leq C\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\mu^{s-\frac{1}{2}}\sigma(\mu)\left|\int_0^\infty h_2(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}\,d\xi\right|d\mu,
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

con $\sigma(\mu)=\frac{s(\mu)\sqrt{a\mu^2+s^2(\mu)}}{a\mu^2-1}$. Ahora, si se considera el cambio de variable $\eta=\mu s(\mu)$, se tiene que

$$
\eta^2=\frac{\mu^2(a\mu^2-1)}{1-b\mu^2}. \tag{2.31}
$$

Más aún, se tiene que

$$
2\eta d\eta=\frac{-2\mu[a\mu^2(b\mu^2-1)-(a\mu^2-1)]}{(1-b\mu^2)^2}d\mu,
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
d\eta &= \frac{[a\mu^2(1-b\mu^2)+(a\mu^2-1)]}{(a\mu^2-1)^{1/2}(1-b\mu^2)^{3/2}}d\mu\\
&= \frac{(a\mu^2+s^2(\mu))}{(a\mu^2-1)^{1/2}(1-b\mu^2)^{1/2}}d\mu.
\end{aligned}
$$

Usando los estimativos (2.29) y (2.30), se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|T_1(g_1)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} &\leq C\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\mu^{s+\frac{1}{2}}\sigma(\mu)\left(\frac{(a\mu^2-1)^{1/2}(1-b\mu^2)^{1/2}}{(a\mu^2+s^2(\mu))}\right)\\
&\quad\left|\int_0^\infty h_1(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}\,d\xi\right|\left(\frac{(a\mu^2+s^2(\mu))}{(a\mu^2-1)^{1/2}(1-b\mu^2)^{1/2}}\right)d\mu\\
&\leq C\int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\mu^{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a\mu^2+s^2(\mu)}}\right)\\
&\quad\left|\int_0^\infty h_1(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}\,d\xi\right|\left(\frac{(a\mu^2+s^2(\mu))}{(a\mu^2-1)^{1/2}(1-b\mu^2)^{1/2}}\right)d\mu
\end{aligned}
$$

y de manera similar,

$$
\begin{aligned}
\|T_1(g_2)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} &\leq C\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\mu^{s-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a\mu^2+s^2(\mu)}}\right)\\
&\quad\left|\int_0^\infty h_2(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}\,d\xi\right|\left(\frac{(a\mu^2+s^2(\mu))}{(a\mu^2-1)^{1/2}(b\mu^2-1)^{1/2}}\right)d\mu.
\end{aligned}
$$

Dado que $\frac{1}{\sqrt{a}}\leq\mu\leq\frac{1}{\sqrt{b}}$ y que $\eta=\mu s(\mu)$, se puede concluir para $\eta\neq 0$ que

$$
\sqrt{a\mu^2+s^2(\mu)}=\sqrt{a\mu^2+\frac{\eta^2}{\mu^2}}\geq\sqrt{1+b\eta^2}\geq C\sqrt{1+\eta^2},\quad C^2=\text{mín}\{1,b\},
$$

de donde

$$\mu^{s\pm\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a\mu^2+s^2(\mu)}}\right)\leq C\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}.$$

De este último estimativo, se tiene que para $i=1,2$,

$$\|T_1(g_i)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\leq C\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\left|\int_0^\infty h_i(\xi)e^{-i\eta\xi}\,d\xi\right|d\eta, \tag{2.32}$$

de donde, aplicando la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned}\|T_1(g_i)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} &\leq C\left\|\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\right\|_{L^2_\eta(\mathbb{R}^+)}\left\|\int_0^\infty h_i(\xi)e^{-i\eta\xi}\,d\xi\right\|_{L^2_\eta(\mathbb{R}^+)}\\ &\leq C\|h_i\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.\end{aligned} \tag{2.33}$$

De este útlimo estimativo y de (2.35), se puede concluir que

$$\begin{aligned}\|U_1(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} &\leq \|T_1(g_1)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}+\|T_1(g_2)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\\ &\leq C\left(\|h_1\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}+\|h_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\right).\end{aligned} \tag{2.34}$$

Ahora, para estimar $U_2(x,t)$, se procede definiendo el operador T_2 como

$$T_2(g)(x,t)=\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}e^{i\mu s(\mu)t}e^{\gamma_2(\mu)x}g(\mu)d\mu.$$

Si se consideran las funciones g_3 y g_4 como

$$\begin{aligned}g_3(\mu)&=\left(\frac{s^2(\mu)(\sqrt{a}\mu-is(\mu))}{\sqrt{a}(a\mu^2-1)}\right)\left(\int_0^\infty h_1(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}\,d\xi\right),\\ g_4(\mu)&=\left(\frac{s(\mu)(\sqrt{a}\mu-is(\mu))}{\sqrt{a}(a\mu^2-1)}\right)\left(\int_0^\infty h_2(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}\,d\xi\right),\end{aligned}$$

se tiene que

$$U_2(x,t)=\frac{\sqrt{a}}{2\pi}(iT_2(g_3)+T_2(g_4)). \tag{2.35}$$

Sea $s\geq 0$ dado, $n=[s]+1$ y $g\in L^2\left(\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$, entonces para $k=0,1,2,...,n$ se tiene que

$$\partial_x^k T_2(g)(x,t)=\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}[\gamma_2(\mu)]^k e^{i\mu s(\mu)t}e^{\gamma_2(\mu)x}g(\mu)d\mu.$$

Como lo hizo J. Bona, M Sun, y B. Zhang en [6] (Lemma 3.2), se define

$$\xi(\mu)=\frac{1}{\sqrt{a}}s(\mu)\qquad \text{y}\qquad G(\mu)=[\gamma_2(\mu)]^k e^{i\mu s(\mu)t}g(\mu).$$

Con estas definiciones se tiene que

$$\partial_x^k T_2(g)(x,t) = \int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} e^{i\xi(\mu)x} G(\mu) d\mu.$$

Observe que $\xi'(\mu) \neq 0$ y $|\xi'(\mu)| > \dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$ en el intervalo $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}, \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)$. En efecto,

$$\xi'(\mu) = \frac{(a-b)\mu}{\sqrt{a}(a\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(1-b\mu^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$

Ahora, para $\mu \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}, \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)$ se tiene que

$$a\mu^2 - 1 \leq \frac{a-b}{b}, \quad 1 - b\mu^2 \leq \frac{a-b}{a},$$

de donde se concluye que

$$|\xi'(\mu)| \geq \frac{\sqrt{ab}}{a-b}.$$

De este modo, si se considera el cambio de variable $\omega = \xi(\mu)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\partial_x^k T_2(g)(x,t) &= \int_{\xi\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}^{\xi\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)} e^{i\omega x} G(\xi^{-1}(\omega)) \frac{1}{\xi'\left(\xi^{-1}(\omega)\right)} d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} G(\xi^{-1}(\omega)) \frac{1}{\xi'\left(\xi^{-1}(\omega)\right)} \chi_{\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right), \xi\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\right)} d\omega,
\end{aligned}$$

donde χ_A denota la función característica sobre A. De la fórmula de Parseval se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k T_2(g)(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \|\partial_x^k \widehat{T_2(g)(\cdot},t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[G(\xi^{-1}(\omega)) \frac{1}{\xi'\left(\xi^{-1}(\omega)\right)} \chi_{\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right), \xi\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\right)} \right]^2 d\omega \\
&= \int_{\xi\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}^{\xi\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)} \left[G(\xi^{-1}(\omega)) \frac{1}{\xi'\left(\xi^{-1}(\omega)\right)} \right]^2 d\omega \\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} |G(\mu)|^2 \frac{1}{|\xi'(\mu)|^2} d\mu,
\end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$\|\partial_x^k T_2(g)(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \leq C \left\| \gamma_2^k \frac{g}{\xi'} \right\|_{L^2(1/\sqrt{a}, 1/\sqrt{b})}^2. \tag{2.36}$$

Luego, utilizando (2.36),

$$\begin{aligned}
\|T_2(g)(\cdot,t)\|_{H^n(\mathbb{R}^+)} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\left\|\partial_x^k T_2(g)(\cdot,t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}\right)^{1/2}\\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} C\left\||\gamma_2|^k \tfrac{g}{\xi'}\right\|^2_{L^2(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})}\right)^{1/2}\\
&\leq \left(nC\left\||\gamma_2|^n \tfrac{g}{\xi'}\right\|^2_{L^2(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})}\right)^{1/2}\\
&\leq C\left\||\gamma_2|^n \tfrac{g}{\xi'}\right\|_{L^2(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})}.
\end{aligned}$$

Luego, utilizando el Teorema de Interpolación de Calderon-Lions, se tiene que

$$\|T_2(g)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \leq C\left\||\gamma_2|^s \frac{g}{\xi'}\right\|_{L^2(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})}. \tag{2.37}$$

Ahora, note que

$$\begin{aligned}
\frac{|g_3(\mu)|^2}{|\xi'(u)|^2}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right) &= \frac{(a\mu^2-1)^{\frac{3}{2}}(1-b\mu^2)^{\frac{3}{2}}}{(a-b)^2\mu^2}\left|\int_0^\infty h_1(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}d\xi\right|^2\\
&\leq \frac{C}{s^3(\mu)}\left|\int_0^\infty h_1(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}d\xi\right|^2,\\
\frac{|g_4(\mu)|^2}{|\xi'(u)|^2}\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right) &= \frac{(a\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(1-b\mu^2)^{\frac{5}{2}}}{(a-b)^2\mu^2}\left|\int_0^\infty h_2(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}d\xi\right|^2\\
&\leq \frac{C}{s^5(\mu)}\left|\int_0^\infty h_2(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}d\xi\right|^2.
\end{aligned}$$

De este modo, aplicando (2.37) a las funciones $g = g_3$ y $g = g_4$, se tienen respectivamente que

$$\begin{aligned}
\|T_2(g_3)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \leq&\ C\left\||\gamma_2|^s \tfrac{g_3}{\xi'}\right\|_{L^2(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})}\\
\leq&\ C\left[\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} |\gamma_2(\mu)|^{2s}\frac{|g_3(\mu)|^2}{|\xi'(u)|^2}d\mu\right]^{1/2}\\
\leq&\ C\left[\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} |s(\mu)|^{2s-3}\left|\int_0^\infty h_1(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}\,d\xi\right|^2\frac{d\eta}{d\mu}d\mu\right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

y

$$\begin{aligned}\|T_2(g_4)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \leq\ & C\big\||\gamma_2|^s\tfrac{g_4}{\xi'}\big\|_{L^2(1/\sqrt{a},1/\sqrt{b})}\\ \leq\ & C\left[\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}|\gamma_2(\mu)|^{2s}\frac{|g_4(\mu)|^2}{|\xi'(u)|^2}d\mu\right]^{1/2}\\ \leq\ & C\left[\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}|s(\mu)|^{2s-5}\left|\int_0^\infty h_1(\xi)e^{-i\mu s(\mu)\xi}\,d\xi\right|^2\frac{d\eta}{d\mu}d\mu\right]^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Finalmente, dado que $\mu\in\left[\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{b}}\right]$, se tiene que $|s(\mu)|=|\eta\mu^{-1}|\leq C\eta$. Así, usando el cambio de variable $\eta=\mu s(\mu)$ en (2.38) y (2.39), se tiene respectivamente que

$$\begin{aligned}\|T_2(g_1)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \leq\ & C\left[\int_0^\infty \eta^{2s-3}\left(\int_0^\infty h_1(\xi)e^{-i\eta\xi}\,d\xi\right)^2 d\eta\right]^{1/2}\\ \leq\ & C\left\|(1+\eta)^{2s-3}\int_0^\infty h_1(\xi)e^{-i\eta\xi}\,d\xi\right\|_{L^2_\eta(0,+\infty)}\\ \leq\ & C\|h_1\|_{H_0^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\|T_2(g_2)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \leq\ & C\left[\int_0^\infty \eta^{2s-5}\left(\int_0^\infty h_2(\xi)e^{-i\eta\xi}\,d\xi\right)^2 d\eta\right]^{1/2}\\ \leq\ & C\left\|(1+\eta)^{2s-5}\int_0^\infty h_2(\xi)e^{-i\eta\xi}\,d\xi\right\|_{L^2_\eta(0,+\infty)}\\ \leq\ & C\|h_2\|_{H_0^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)}.\end{aligned}$$

De los estimativos anteriores y de (2.35) se concluye que

$$\begin{aligned}\|U_2(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} &\leq \|T_2(g_3)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}+\|T_2(g_4)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\\ &\leq C\left(\|h_1\|_{H_0^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)}+\|h_2\|_{H_0^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)}\right)\end{aligned} \tag{2.40}$$

y por lo tanto, de los estimativos (2.22), (2.34) y (2.40), se tiene que

$$\begin{aligned}\|q(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \leq\ & \|U_1(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}+\|U_2(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\\ & +\|\overline{U}_1(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}+\|\overline{U}_2(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\\ \leq\ & C\left(\|h_1\|_{H_0^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)}+\|h_2\|_{H_0^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)}\right).\end{aligned}$$

Con un procedimiento similar (ver fórmulas (2.23), (2.24) y (2.25)), se tiene que

$$\|r(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\leq C\left(\|h_1\|_{H_0^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)}+\|h_2\|_{H_0^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)}\right).$$

□

2.2. IVP lineal homogéneo sobre la recta

Considere el problema de valor inicial (**IVP**) sobre la recta,

$$\left\{\begin{aligned} \partial_t X(x,t) &= MX(x,t), \quad x\in\mathbb{R}, \quad t>0,\\ X(x,0) &= \begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}. \end{aligned}\right. \tag{2.41}$$

Para este caso se utilizará la misma técnica que en el caso anterior pero via transformada de Fourier con respecto a la variable espacial x.

Observación 2.2.1. *Note que a diferencia del caso anterior, la matriz M se va a ver afectada directamente por la transformada de Fourier, por lo cual es necesario estudiar las representaciones duales de los operadores ∂_x y $B^{-1}A\partial_x$.*
Por propiedades de transformada de fourier $\widehat{\partial_x f(x)} = i\xi\widehat{f}(\xi)$, donde ξ denota la variable dual de x. Para el segundo operador, sea $h(x) = B^{-1}A\partial_x f(x)$, luego, aplicando el operador B y transformada de fourier a ambos lados de la igualdad se tiene que

$$\begin{aligned} (h(x)\widehat{-bh''}(x)) &= (f'(x)\widehat{-af'''}(x))\\ \widehat{h}(\xi)+b\xi^2\widehat{h}(\xi) &= i\xi\widehat{f}(\xi)+ai\xi^3\widehat{f}(\xi)\\ \widehat{h}(\xi) &= i\xi\left(\frac{1+a\xi^2}{1+b\xi^2}\right)\widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Así, denotando $\Lambda(\xi)=\dfrac{1+a\xi^2}{1+b\xi^2}$, los operadores duales de ∂_x y $B^{-1}A\partial_x$ están dados por

$$\widehat{\partial_x} = i\xi, \qquad \widehat{B^{-1}A\partial}_x = i\xi\Lambda(\xi). \tag{2.42}$$

Lema 2.2.2. *Sea $s\in\mathbb{R}$ y $f_1,f_2\in H^s(\mathbb{R})$, entonces la solución $W_R(f_1,f_2)(x,t)$ del (**IVP**) (2.41) está dado por la fórmula explícita*

$$W_R(f_1,f_2)(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\widehat{M}t}\begin{pmatrix}\hat{f}_1(\xi)\\ \hat{f}_2(\xi)\end{pmatrix} e^{ix\xi}\,d\xi. \tag{2.43}$$

donde

$$e^{\widehat{M}t} = \begin{pmatrix} (e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}+e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}) & \dfrac{(e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}-e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t})}{\sqrt{\Lambda(\xi)}}\\ \sqrt{\Lambda(\xi)}(e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}-e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}) & (e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}+e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}) \end{pmatrix}$$

Demostración. Si aplicamos la transformada de Fourier con respecto a x al **IVP**

(2.41), se obtiene el siguiente **IVP**

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{X}(\xi,t) &= \widehat{M}\widehat{X}(\xi,t), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t>0, \\ \widehat{X}(x,0) &= \begin{pmatrix} \widehat{f}_1(\xi) \\ \widehat{f}_2(\xi) \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{2.44}$$

donde ξ denota la variable dual de x, y $\widehat{q}$, $\widehat{r}$, $\widehat{f_1}$, $\widehat{f_2}$ son las transformadas de Fourier de q, r, f_1, f_2 con respecto a x, respectivamente, y

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & i\xi \\ i\xi\Lambda(\xi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, la solución general de (2.44) tiene la forma

$$\widehat{X}(\xi,t) = e^{\widehat{M}t} \begin{pmatrix} \widehat{f}_1(\xi) \\ \widehat{f}_2(\xi) \end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

Un cálculo directo muestra que

$$e^{\widehat{M}t} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t) & \dfrac{i\sin(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)}{\sqrt{\Lambda(\xi)}} \\ i\sqrt{\Lambda(\xi)}\sin(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t) & \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t) \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \widehat{M} &= \begin{pmatrix} 0 & i\xi \\ \Lambda(\xi)i\xi & 0 \end{pmatrix} \\ \widehat{M}^2 &= \begin{pmatrix} -\Lambda(\xi)\xi^2 & 0 \\ 0 & -\Lambda(\xi)\xi^2 \end{pmatrix} = -\Lambda(\xi)\xi^2 I \\ \widehat{M}^3 &= -\Lambda(\xi)\xi^2\widehat{M} \\ \widehat{M}^4 &= \Lambda^2(\xi)\xi^4 I = (-\Lambda(\xi)\xi^2)^2 I \\ \widehat{M}^5 &= \Lambda^2(\xi)\xi^4\widehat{M} = (-\Lambda(\xi)\xi^2)^2\widehat{M}, \end{aligned}$$

luego,

$$
\begin{aligned}
e^{\widehat{M}t} &= I + \widehat{M}t + \frac{\widehat{M}^2t^2}{2!} + \frac{\widehat{M}^3t^3}{3!} + \frac{\widehat{M}^4t^4}{4!} + \frac{\widehat{M}^5t^5}{5!} + ...\\
&= I + t\widehat{M} - \frac{\Lambda(\xi)\xi^2t^2}{2!}I - \frac{\Lambda(\xi)\xi^2t^3}{3!}\widehat{M} + \frac{(\Lambda(\xi)\xi^2)^2t^4}{4!}I + \frac{(\Lambda(\xi)\xi^2)^2t^5}{5!}\widehat{M} - ...\\
&= \left(1 - \frac{(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)^2}{2!} + \frac{(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)^4}{4!} - ...\right)I\\
&+ \frac{1}{\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi}\left(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t - \frac{(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)^3}{3!} + \frac{(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)^5}{5!} - ...\right)\widehat{M}\\
&= \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)I + \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)}{\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi}\widehat{M}\\
&= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t) & \dfrac{i\operatorname{sen}(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)}{\sqrt{\Lambda(\xi)}} \\ i\sqrt{\Lambda(\xi)}\operatorname{sen}(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t) & \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Usando esta fórmula en (2.45), se tiene que

$$
\begin{aligned}
\widehat{X}(\xi,t) &= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t) & \dfrac{i\sin(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)}{\sqrt{\Lambda(\xi)}} \\ i\sqrt{\Lambda(\xi)}\sin(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t) & \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{f}_1(\xi) \\ \widehat{f}_2(\xi) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)\widehat{f}_1(\xi) + \dfrac{i\sin(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)\widehat{f}_2(\xi)}{\sqrt{\Lambda(\xi)}} \\ i\sqrt{\Lambda(\xi)}\sin(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)\widehat{f}_1(\xi) + \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)\widehat{f}_2(\xi) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ahora, al aplicar la transformada de Fourier inversa, se tiene que $W_R(f_1, f_2)$ tiene la fórmula explícita

$$
\begin{aligned}
W_R(f_1,f_2)(x,t) = &\int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t) & \dfrac{i\sin(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)}{\sqrt{\Lambda(\xi)}} \\ i\sqrt{\Lambda(\xi)}\sin(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t) & \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)\widehat{f}_2(\xi) \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} \hat{f}_1(\xi) \\ \hat{f}_2(\xi) \end{pmatrix} e^{ix\xi}d\xi.
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

Usando el hecho que

$$
\cos(w) = \frac{1}{2}\left(e^{iw} + e^{-iw}\right), \quad \sin(w) = \frac{1}{2i}\left(e^{iw} - e^{-iw}\right),
$$

se obtiene el resultado deseado. $\square$

Observación 2.2.3. *Antes de continuar, note que las componentes de la solución* *del* **IVP** *(2.41) son*

$$\begin{aligned}
q(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[(e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}+e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t})\widehat{f}_1(\xi)\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{\Lambda(\xi)}}(e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}-e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t})\widehat{f}_2(\xi)\Big]e^{ix\xi}d\xi\\
r(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sqrt{\Lambda(\xi)}(e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}-e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t})\widehat{f}_1(\xi)\\
&\quad+(e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}+e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t})\widehat{f}_2(\xi)\Big]e^{ix\xi}d\xi,
\end{aligned}$$

esto es, $W_R(f_1,f_2)(x,t)=(q,r)^T(x,t)$.
Además, note que $\Lambda(\xi)$ *es acotado. En efecto, dado que* $b<a$ *se tiene que* $b+ab\xi^2<a+ab\xi^2$, *luego* $b(1+a\xi^2)<a(1+b\xi^2)$ *y por lo tanto*

$$\Lambda(\xi)=\frac{1+a\xi^2}{1+b\xi^2}<\frac{a}{b}.$$

Del mismo hecho también se tiene que $1+b\xi^2<1+a\xi^2$, *de donde*

$$1<\frac{1+a\xi^2}{1+b\xi^2}=\Lambda(\xi).$$

Lema 2.2.4. *Sea* $s\in(-\infty,+\infty)$ *y* $f_1,f_2\in H^s(\mathbb{R})$, *entonces se tiene que*

$$\sup_{t>0}\|W_R(f_1,f_2)(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R})}\leq C\left(\|f_1\|_{H^s(\mathbb{R})}+\|f_2\|_{H^s(\mathbb{R})}\right).$$

Demostración. De las fórmulas previas para q y r, y del hecho que $\Lambda(\xi)$ es acotado, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|q(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \frac{1}{2}\Big\|(1+|\xi|)^s\Big|(e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}+e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t})\widehat{f}_1(\xi)\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{\Lambda(\xi)}}(e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}-e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t})\widehat{f}_2(\xi)\Big|\Big\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\\
&\leq \frac{1}{2}\left\|(1+|\xi|)^s\left(\left|e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}\right|+\left|e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}\right|\right)\widehat{f}_1(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\|\frac{(1+|\xi|)^s}{\sqrt{\Lambda(\xi)}}\left(\left|e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}\right|+\left|e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}\right|\right)\widehat{f}_2(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\\
&\leq \left\|(1+|\xi|)^s\widehat{f}_1(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}+C\left\|(1+|\xi|)^s\widehat{f}_2(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\\
&\leq C\left(\|f_1\|_{H^s(\mathbb{R})}+\|f_2\|_{H^s(\mathbb{R})}\right)
\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
\|r(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R})} & \leq \frac{1}{2}\left\|(1+|\xi|)^s\left|\sqrt{\Lambda(\xi)}(e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}-e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t})\widehat{f}_1(\xi)\right.\right. \\
& \left.\left.+(e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}+e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t})\widehat{f}_2(\xi)\right|\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} \\
& \leq \frac{1}{2}\left\|(1+|\xi|)^s\sqrt{\Lambda(\xi)}\left(\left|e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}\right|+\left|e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}\right|\right)\widehat{f}_1(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} \\
& +\frac{1}{2}\left\|(1+|\xi|)^s\left(\left|e^{i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}\right|+\left|e^{-i\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t}\right|\right)\widehat{f}_2(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} \\
& \leq \left\|(1+|\xi|)^s\widehat{f}_1(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}+\left\|(1+|\xi|)^s\widehat{f}_2(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} \\
& \leq C\left(\|f_1\|_{H^s(\mathbb{R})}+\|f_2\|_{H^s(\mathbb{R})}\right).
\end{aligned}$$

De este modo se puede concluir que

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0}\|W_R(f_1,f_2)(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R})} & \leq \sup_{t>0}\|q(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R})}+\sup_{t>0}\|r(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
& \leq C\left(\|f_1\|_{H^s(\mathbb{R})}+\|f_2\|_{H^s(\mathbb{R})}\right).
\end{aligned}$$

□

Observación 2.2.5. *Ahora, interesa estudiar el* $\sup_{x>0}\|W_R(f_1,f_2)(x,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})}$ *con* $s\in\mathbb{R}$. *Observe que* $W_R(f_1,f_2)$ *se puede reescribir en términos de la función auxiliar* $\phi(\xi)=\xi\sqrt{\Lambda(\xi)}$. *En efecto, note que*

$$\begin{aligned}
q(x,t)= & \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\widehat{f}_1(\xi)+\frac{1}{\sqrt{\Lambda(\xi)}}\widehat{f}_2(\xi)\right)e^{i\phi(\xi)t}\right. \\
& \left.+\left(\widehat{f}_1(\xi)-\frac{1}{\sqrt{\Lambda(\xi)}}\widehat{f}_2(\xi)\right)e^{-i\phi(\xi)t}\right]e^{ix\xi}d\xi, \\
r(x,t)= & \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\sqrt{\Lambda(\xi)}\widehat{f}_1(\xi)+\widehat{f}_2(\xi)\right)e^{i\phi(\xi)t}\right. \\
& \left.-\left(\sqrt{\Lambda(\xi)}\widehat{f}_1(\xi)-\widehat{f}_2(\xi)\right)e^{-i\phi(\xi)t}\right]e^{ix\xi}d\xi.
\end{aligned}$$

Ahora, para $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, *considere los operadores*

$$\begin{aligned}
V_1(f)(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}e^{i\phi(\xi)t}d\xi, \\
V_2(f)(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}e^{-i\phi(\xi)t}d\xi.
\end{aligned}$$

Sea $\xi=\xi(\eta)$ *la raiz de la ecuación* $\phi(\xi)=\eta$, *entonces usando el cambio de variable se puede ver que*

$$V_1(f)(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\eta t}\widehat{f}(\xi(\eta))e^{ix\xi(\eta)}\frac{d\xi(\eta)}{d\eta}d\eta.$$

En particular, la transformada de Fourier para $V_1(f)(x,\cdot)$ con respecto a la variable $t\in\mathbb{R}$ con variable dual η está dada por

$$\mathcal{F}^t(V_1(f))(x,\eta)=\widehat{f}(\xi(\eta))e^{ix\xi(\eta)}\frac{d\xi(\eta)}{d\eta}.$$

De este modo, utilizando el cambio de variable $\eta=\phi(\xi)$ con $\xi\in\mathbb{R}$ en $V_1(f)(x,t)$, para cada $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|V_1(f)(x,\cdot)\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})} &= \left\|\eta^{\alpha}(1+|\eta|)^{\beta-\alpha}\widehat{f}(\xi(\eta))e^{ix\xi(\eta)}\frac{d\xi(\eta)}{d\eta}\right\|_{L^2_\eta(\mathbb{R})}\\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty}|\eta|^{2\alpha}(1+|\eta|)^{2\beta-2\alpha}\left|\widehat{f}(\xi(\eta))\right|^2\left|\frac{d\xi(\eta)}{d\eta}\right|^2 d\eta\right)^{1/2}\\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\xi)|^{2\alpha}(1+|\phi(\xi)|)^{2\beta-2\alpha}\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2\left|\frac{d\xi}{d\eta}\right|^2 \frac{d\eta}{d\xi}d\xi\right)^{1/2}\\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\xi)|^{2\alpha}(1+|\phi(\xi)|)^{2\beta-2\alpha}\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2\left|\frac{d\xi}{d\eta}\right| d\xi\right)^{1/2}.
\end{aligned}\tag{2.47}$$

Dado que

$$\eta^2=\xi^2\Lambda(\xi)=\xi^2\left(\frac{1+a\xi^2}{1+b\xi^2}\right),\quad \xi\in\mathbb{R},\tag{2.48}$$

entonces

$$\begin{aligned}
2\eta d\eta &= \frac{(2\xi+4a\xi^3)(1+b\xi^2)-2b\xi^3(1+a\xi^2)}{(1+b\xi^2)^2}d\xi\\
d\eta &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda(\xi)}}\left[\frac{2\xi(1+2a\xi^2+ab\xi^4)}{2\xi(1+b\xi^2)^2}\right]d\xi\\
\frac{d\xi}{d\eta} &= \sqrt{\Lambda(\xi)}\left[\frac{(1+b\xi^2)^2}{1+2a\xi^2+ab\xi^4}\right].
\end{aligned}$$

Puesto que $b<a$ se tiene que $1+2b\xi^2+b^2\xi^4<1+2a\xi^2+ab\xi^4$, luego

$$\left|\frac{d\xi}{d\eta}\right|<\sqrt{\Lambda(\xi)}<\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Además, $|\phi(\xi)|<\sqrt{\frac{a}{b}}|\xi|$. De este modo, siguiendo con el estimativo (2.47), se puede concluir que

$$\begin{aligned}
\|V_1(f)(x,\cdot)\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})} &\le C\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|^{2\alpha}(1+|\xi|)^{2\beta-2\alpha}\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}\\
&\le C\left\||\xi|^{\alpha}(1+|\xi|)^{\beta-\alpha}\widehat{f}(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\\
&\le C\,\|f\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}\tag{2.49}$$

En particular, para $\alpha = 0$, se obtiene que

$$\|V_1(f)(x,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C\,\|f\|_{H^s(\mathbb{R})}\,. \tag{2.50}$$

Utilizando el cambio de variable $\eta = -\phi(\xi)$ y siguiendo un procedimiento similar, se obtienen los mismos estimativos (2.49) y (2.50) para el operador V_2.
Más aún, dadas las funciones A, B, C, y D tales que

$$\begin{aligned}
\widehat{A}(\xi) &= \widehat{f_1}(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\Lambda(\xi)}}\widehat{f_2}(\xi), \quad \widehat{B}(\xi) = \widehat{f_1}(\xi) - \frac{1}{\sqrt{\Lambda(\xi)}}\widehat{f_2}(\xi),\\
\widehat{C}(\xi) &= \sqrt{\Lambda(\xi)}\widehat{f_1}(\xi) + \widehat{f_2}(\xi), \quad \widehat{D}(\xi) = -\sqrt{\Lambda(\xi)}\widehat{f_1}(\xi) + \widehat{f_2}(\xi),
\end{aligned}$$

se tiene que para todo $F \in \{A, B, C, D\}$,

$$|\widehat{F}| \leq C(a,b)\left(|\widehat{f_1}| + |\widehat{f_2}|\right)$$

y por lo tanto, para $i = 1, 2$,

$$\|V_i(F)(x,\cdot)\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})} \leq C\left(\|f_1\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})} + \|f_2\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})}\right), \tag{2.51}$$

$$\|V_i(F)(x,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C\left(\|f_1\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|f_2\|_{H^s(\mathbb{R})}\right). \tag{2.52}$$

El siguiente lema se obtiene de la observación anterior.
Lema 2.2.6. *Sea $s \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f_1, f_2 \in S(\mathbb{R})$. Entonces se tiene que*

$$\begin{aligned}
\sup_{x>0}\|W_R(f_1,f_2)(x,\cdot)\|_{Y^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})} \leq \;& C\left(\|f_1\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})} + \|f_2\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})}\right),\\
\sup_{x>0}\|W_R(f_1,f_2)(x,\cdot)\|_{Y^s(\mathbb{R})} \leq \;& C\left(\|f_1\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|f_2\|_{H^s(\mathbb{R})}\right),\\
\sup_{x>0}\|M^j W_R(f_1,f_2)(x,\cdot)\|_{Y^s(\mathbb{R})} \leq \;& C\left(\|f_1\|_{H^{s+j}(\mathbb{R})} + \|f_2\|_{H^{s+j}(\mathbb{R})}\right).
\end{aligned}$$

Demostración. Para los primeros dos estimativos, note que

$$q(x,t) = \frac{1}{2}\left(V_1(A)(x,t) + V_2(B)(x,t)\right), \quad r(x,t) = \frac{1}{2}\left(V_1(C)(x,t) + V_2(D)(x,t)\right).$$

De este modo, por la observación anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\sup_{x>0}\|W_R(f_1,f_2)(x,\cdot)\|_{Y^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})} &\leq \sup_{x>0}\|q(x,\cdot)\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})} + \sup_{x>0}\|r(x,\cdot)\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})}\\
&\leq C\left(\|f_1\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})} + \|f_2\|_{\mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{R})}\right)
\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
\sup_{x>0}\|W_R(f_1,f_2)(x,\cdot)\|_{Y^s(\mathbb{R})} &\leq \sup_{x>0}\|q(x,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})} + \sup_{x>0}\|r(x,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})}\\
&\leq C\left(\|f_1\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|f_2\|_{H^s(\mathbb{R})}\right).
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Para el tercer estimativo observe que

$$\partial_x(e^{i\xi x}) = i\xi e^{i\xi x}, \quad B^{-1}A\partial_x(e^{i\xi x}) = i\xi\Lambda(\xi)e^{i\xi x}.$$

En efecto, la segunda igualdad se obtiene a partir de la siguiente igualdad

$$A\left(\partial_x(e^{i\xi x})\right) = i\xi\left(1+a\xi^2\right)e^{i\xi x} = i\xi\Lambda\xi\left(1+b\xi^2\right)e^{i\xi x} = B\left(i\xi\Lambda(\xi)e^{i\xi x}\right).$$

Ahora, de la representación (2.46) y las dos igualdades previas, se puede concluir que $MW_R(f_1,f_2) = W_R((M(f_1,f_2)^T)^T)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
&MW_R(f_1,f_2)(x,t)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix} i\sqrt{\Lambda(\xi)}\sin(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)i\xi\widehat{f}_1(\xi) + \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)i\xi\widehat{f}_2(\xi) \\ \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)i\xi\Lambda(\xi)\widehat{f}_1(\xi) + \dfrac{i\sin(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)}{\sqrt{\Lambda(\xi)}}i\xi\Lambda(\xi)\widehat{f}_2(\xi)\end{pmatrix}e^{ix\xi}d\xi\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix} \dfrac{i\sin(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)\widehat{B^{-1}A\partial_x}f_1(\xi)}{\sqrt{\Lambda(\xi)}} + \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)\widehat{\partial_x f}_2(\xi) \\ \cos(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)\widehat{B^{-1}A\partial_x}f_1(\xi) + i\sqrt{\Lambda(\xi)}\sin(\sqrt{\Lambda(\xi)}\xi t)\widehat{\partial_x f_2}(\xi)\end{pmatrix}e^{ix\xi}d\xi\\
&= W_R(\partial_x f_2, B^{-1}A\partial_x f_1)(x,t)\\
&= W_R((M(f_1,f_2)^T)^T)(x,t).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Así, usando el estimativo (2.53) y el hecho que $\widehat{\partial_x}$ y $\widehat{B^{-1}A\partial_x}$ son operadores de orden uno (ver (2.42)), se concluye que

$$\begin{aligned}
&\sup_{x>0}\|MW_R(f_1,f_2)(x,\cdot)\|_{Y^s(\mathbb{R})} = \sup_{x>0}\left\|W_R(\partial_x f_2, B^{-1}A\partial_x f_1)(x,\cdot)\right\|_{Y^s(\mathbb{R})}\\
&\leq C\left(\|\partial_x f_2\|_{H^s(\mathbb{R})} + \left\|B^{-1}A\partial_x f_1\right\|_{H^s(\mathbb{R})}\right)\\
&\leq C\left(\left\|(1+|\xi|)^s\widehat{(\partial_x f_2)}(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} + \left\|(1+|\xi|)^s(\widehat{B^{-1}A\partial_x}f_1)(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\right)\\
&\leq C\left(\left\|(1+|\xi|)^s|\xi|\widehat{f}_2(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} + \left\|(1+|\xi|)^s|\xi||\Lambda(\xi)|\widehat{f}_1(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\right)\\
&\leq C\left(\left\|(1+|\xi|)^{s+1}\widehat{f}_2(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} + \left\|(1+|\xi|)^{s+1}\widehat{f}_1(\xi)\right\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\right)\\
&\leq C\left(\|f_1\|_{H^{s+1}(\mathbb{R})} + \|f_2\|_{H^{s+1}(\mathbb{R})}\right).
\end{aligned}$$

El mismo argumento de forma reiterativa muestra el estimativo para $k \in \mathbb{N}$. $\square$

2.3. IBVP lineal homogéneo: caso $h_1 \equiv h_2 \equiv 0$.

Considere el **IBVP** lineal homogéneo en el primer cuadrante

$$\begin{cases} \partial_t X(x,t) &= MX(x,t), \quad x>0, \quad t>0, \\ X(x,0) &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \quad X(0,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.55}$$

En las secciones 1.1 y 1.2 se encontraron explícitamente las soluciones $W_b(h_1,h_2)$ y $W_R(f_1,f_2)$ de los **IBVP** lineales (2.3) y (2.41), respectivamente. Para el caso del **IBVP** lineal homogéneo en el primer cuadrante (2.55), se utilizarán las soluciones explícitas W_b y W_R con condición inicial en el espacio $H_0^l(\mathbb{R}^+)$, para obtener una solución explícita del problema.
Dadas las funciones $f_1, f_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, se consideran las extensiones $\widetilde{f_i}$ para f_i de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ tales que $\widetilde{f_i}(x)=0$ para $x \notin \mathbb{R}^+$, y se definen funciones $\widetilde{h}_i$ como

$$\begin{pmatrix} \tilde{h}_1(t) \\ \tilde{h}_2(t) \end{pmatrix} = W_R(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)(0,t).$$

El siguiente lema plantea una solución explícita del **IBVP** lineal homogéneo (2.55) utilizando las funciones $\tilde{f}_i$ y $\tilde{h}_i$.
Lema 2.3.1. *Sean $f_1, f_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, entonces la solución $W_C(f_1,f_2)(x,t)$ del* **IBVP** *lineal homogéneo (2.55) está dado por la fórmula explícita*

$$W_C(f_1,f_2)(x,t) = W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(x,t) - W_b(\chi\tilde{h}_1, \chi\tilde{h}_2)(x,t).$$

Demostración. Por definición de $W_C(f_1,f_2)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_t W_C(f_1,f_2)(x,t) = &\ \partial_t W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(x,t) - \partial_t W_b(\chi\tilde{h}_1,\chi\tilde{h}_2)(x,t) \\ = &\ MW_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(x,t) - MW_b(\chi\tilde{h}_1,\chi\tilde{h}_2)(x,t) \\ = &\ MW_C(f_1,f_2)(x,t). \end{aligned}$$

Ahora sólo resta mostrar que cumple las condiciones iniciales. Por un lado,

$$\begin{aligned} W_C(f_1,f_2)(0,t) = &\ W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(0,t) - W_b(\chi\tilde{h}_1,\chi\tilde{h}_2)(0,t) \\ = &\ W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(0,t) - \begin{pmatrix} \chi\tilde{h}_1(t) \\ \chi\tilde{h}_2(t) \end{pmatrix} \\ = &\ W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(0,t) - \begin{pmatrix} \tilde{h}_1(t) \\ \tilde{h}_2(t) \end{pmatrix} \\ = &\ W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(0,t) - W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(0,t), \end{aligned}$$

de donde,

$$W_C(f_1,f_2)(0,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} W_C(f_1,f_2)(x,0) = &\ W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(x,0) - W_b(\chi\tilde{h}_1,\chi\tilde{h}_2)(x,0) \\ = &\ \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(x) \\ \tilde{f}_2(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde,

$$W_C(f_1,f_2)(0,t) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}.$$

□

Ahora, de los estimativos para W_b y W_R se obtiene el estimativo para W_C utilizando su representación anterior.

Lema 2.3.2. *Para $s > \frac{1}{2}$ y $f_1, f_2 \in H_0^s(\mathbb{R}^+)$ se tiene que*

$$\sup_{t>0} \|W_C(f_1,f_2)(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \leq C\left(\|f_1\|_{H_0^s(\mathbb{R}^+)} + \|f_2\|_{H_0^s(\mathbb{R}^+)}\right).$$

Demostración. Para cada $f_1, f_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, se tiene que $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset H^\beta(\mathbb{R})$ para cada $\beta > 0$, y así, por lema 2.2.4 se tiene que

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \|W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(\cdot,t)\|_{Y^\beta(\mathbb{R})} &\leq C\left(\|\tilde{f}_1\|_{H^\beta(\mathbb{R})} + \|\tilde{f}_2\|_{H^\beta(\mathbb{R})}\right) \\ &\leq C\left(\|f_1\|_{H^\beta(\mathbb{R}^+)} + \|f_2\|_{H^\beta(\mathbb{R}^+)}\right) \\ &\leq C\left(\|f_1\|_{H_0^\beta(\mathbb{R}^+)} + \|f_2\|_{H_0^\beta(\mathbb{R}^+)}\right). \end{aligned}$$

Más aún, como $W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(x,t)$ es una solución del **IVP** sobre la recta (2.41) entonces $W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(x,0) = (\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))^T$, luego

$$(\tilde{h}_1(0),\tilde{h}_2(0))^T = W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(0,0) = (\tilde{f}_1(0),\tilde{f}_2(0))^T = (0,0)^T,$$

y en general, para $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \partial^j(\tilde{h}_1(0),\tilde{h}_2(0))^T &= \partial_t^j W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(0,0) = M^j W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(0,0) = M^j(\tilde{f}_1(0),\tilde{f}_2(0))^T \\ &= (0,0)^T. \end{aligned}$$

De este modo, por lemas (1.0.1) y (2.2.6) se tiene que $(\chi\tilde{h}_1,\chi\tilde{h}_2) \in Y_0^\beta(\mathbb{R}^+)$, y que para $\beta > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \|(\chi\tilde{h}_1,\chi\tilde{h}_2)\|_{Y_0^\beta(\mathbb{R}^+)} &\leq \|(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)\|_{Y_0^\beta(\mathbb{R})} \\ &\leq \left\|W_R(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(0,\cdot)\right\|_{Y_0^\beta(\mathbb{R})} \\ &\leq C\left(\left\|\tilde{f}_1\right\|_{H_0^\beta(\mathbb{R})} + \left\|\tilde{f}_2\right\|_{H_0^\beta(\mathbb{R})}\right) \\ &\leq C\left(\|f_1\|_{H_0^\beta(\mathbb{R}^+)} + \|f_2\|_{H_0^\beta(\mathbb{R}^+)}\right). \end{aligned}$$

Así, por lema (2.1.2) se tiene que

$$\begin{aligned}\sup_{t>0}\|W_b(\chi\tilde{h}_1,\chi\tilde{h}_2)(\cdot,t)\|_{Y^\beta(\mathbb{R}^+)} &\leq C\|(\chi\tilde{h}_1,\chi\tilde{h}_2)\|_{Y_0^\beta(\mathbb{R}^+)}\\ &\leq C\left(\|f_1\|_{H_0^\beta(\mathbb{R}^+)}+\|f_2\|_{H_0^\beta(\mathbb{R}^+)}\right).\end{aligned}$$

De esta manera, para cada $f_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ con $i=1,2$,

$$\sup_{t>0}\|W_C(f_1,f_2)(\cdot,t)\|_{Y^\beta(\mathbb{R}^+)} \leq C\left(\|f_1\|_{H_0^\beta(\mathbb{R}^+)}+\|f_2\|_{H_0^\beta(\mathbb{R}^+)}\right).$$

Utilizando la densidad de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ en $H_0^\beta(\mathbb{R}^+)$, se concluye para $f_i \in H_0^\beta(\mathbb{R}^+)$ con $i=1,2$, que

$$\sup_{t>0}\|W_C(f_1,f_2)(\cdot,t)\|_{Y^\beta(\mathbb{R})} \leq C\left(\|f_1\|_{H_0^\beta(\mathbb{R}^+)}+\|f_2\|_{H_0^\beta(\mathbb{R}^+)}\right).$$

□

Capítulo 3

IBVP lineal homogéneo: caso general

En este capítulo se estudia el **IBVP** lineal homogeneo general y se obtiene un estimativo para este problema. Considere el **IBVP** lineal homogeneo general,

$$\begin{cases} \partial_t X(x,t) &= MX(x,t), \quad x>0, \quad t>0, \\ X(x,0) &= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \quad X(0,t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.1}$$

En los resultados siguientes se podrá observar que la solución del **IBVP** (3.1) depende necesariamente de las soluciones $W_b(h_1,h_2)$, $W_R(f_1,f_2)$, y $W_C(f_1,f_2)$. Además, se considerarán los estimativos lineales del capítulo anterior para datos iniciales y condiciones de frontera en los espacios $Y_0^s(\mathbb{R}^+)$, $Y_0^{s-\frac{3}{2},s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$, y se utilizarán modificaciones apropiadas a fin de obtener un estimativo para la solución del **IBVP** (3.1) con datos iniciales y condiciones de frontera sobre los espacios $Y^s(\mathbb{R}^+)$, $Y^{s-\frac{3}{2},s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$, como lo hace Xue in [10].

Observación 3.0.1. *Note que una solución del* **IBVP** *lineal homogéneo se puede expresar en términos de un problema lineal no homogéneo. En efecto, sea X solución del problema lineal homogéneo (3.1) y supongamos que $X = V - K$, donde K es una función que será escogida apropiadamente. Entonces, V satisface,*

$$\partial_t V = \partial_t X + \partial_t K = MX + \partial_t K = MV + \partial_t K - MK,$$

Más aún, para $K_1 = \partial_t K - MK$, la función V satisface el **IBVP** *lineal no homogéneo*

$$\begin{cases} \partial_t V(x,t) &= MV(x,t) + K_1(x,t), \quad x>0, \quad t>0, \\ V(0,t) &= \begin{pmatrix} \tilde{h}_1(t) \\ \tilde{h}_2(t) \end{pmatrix}, \quad V(x,0) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(x) \\ \tilde{f}_2(x) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.2}$$

con datos iniciales y de frontera,

$$\begin{pmatrix}\tilde{h}_1(t)\\ \tilde{h}_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}h_1(t)\\ h_2(t)\end{pmatrix} + K(0,t), \qquad \begin{pmatrix}\tilde{f}_1(x)\\ \tilde{f}_2(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix} + K(x,0).$$

Para este caso, un cálculo directo muestra vía el principio de Duhamel que V viene dada por

$$V(x,t) = W_b(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)(x,t) + W_C(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(x,t) + W_D(K_1)(x,t),$$

con

$$W_D(K_1)(x,t) = \int_0^t W_C(K_1(\cdot,\tau))(x,t-\tau)\,d\tau.$$

En efecto, por un lado se tiene que

$$\partial_t\left(W_b(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)(x,t) + W_C(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(x,t)\right) = M\left(W_b(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)(x,t) + W_C(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(x,t)\right).$$

Por otro lado, derivando con respecto a t y utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo (asumiendo que los cálculos se pueden realizar),

$$\begin{aligned}\partial_t W_D(K_1)(x,t) &= \int_0^t \partial_t W_C(K_1)(x,t-\tau)\,d\tau + W_C(K_1(\cdot,t)))(x,0)\\ &= M\left(\int_0^t W_C(K_1(\cdot,\tau))(x,t-\tau)\,d\tau\right) + W_C(K_1(\cdot,t))(x,0)\\ &= MW_D(K_1)(x,t) + K_1(x,t),\end{aligned}$$

de donde se tiene que $\partial_t V(x,t) = MV(x,t) + K_1(x,t)$.
Además utilizando que

$$\begin{aligned}W_b(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)(0,t) &= (\tilde{h}_1(t),\tilde{h}_2(t))^T, \quad & W_b(\cdot,\cdot)(x,0) &= (0,0)^T\\ W_C(\cdot,\cdot)(0,t) &= (0,0)^T, & W_C(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(x,0) &= (\tilde{f}_1(x),\tilde{f}_2(x))^T,\end{aligned}$$

se concluye que

$$\begin{aligned}V(0,t) &= W_b(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)(0,t) + W_C(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(0,t) + \int_0^t W_C(K_1(\cdot,\tau))(0,t-\tau)\,d\tau\\ &= \begin{pmatrix}\tilde{h}_1(t)\\ \tilde{h}_2(t)\end{pmatrix},\\ V(x,0) &= W_b(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)(x,0) + W_C(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(x,0) + \int_0^0 W_C(K_1(\cdot,\tau))(x,-\tau)\,d\tau\\ &= \begin{pmatrix}\tilde{f}_1(x)\\ \tilde{f}_2(x)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

De este modo, V satisface el problema de valor inicial (3.3). Es importante señalar que, dadas las funciones $f_i, h_i \in H^l(\mathbb{R}^+)$, es necesario definir de manera conveniente las funciones $\tilde{f}_i, \tilde{h}_i \in H_0^l\mathbb{R}^+)$ dependiendo de $l \in \mathbb{R}$, y establecer algunas condiciones de compatibilidad entre las funciones f_i y h_i para $i = 1, 2$ en $x = 0$ y $t = 0$, como veremos en el siguiente resultado.

Condiciones de s-compatibilidad

En el siguiente resultado, asuma para $\frac{1}{2} < s \leq \frac{9}{2}$ que $f_1 \in H^s(\mathbb{R}^+)$, $f_2 \in H^s(\mathbb{R}^+)$, $h_1 \in H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)$ y $h_2 \in H^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$.

(sC1) Para $\frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{2}$, $f_i(0) = h_i(0)$ $(i = 1, 2)$.

(sC2) Para $\frac{3}{2} < s \leq \frac{5}{2}$, $f_i(0) = h_i(0)$ $(i = 1, 2)$ y

$$h_2(0) = 2h_1(0) + f_1'(0), \quad f_2'(0) = -h_1(0),$$

(sC3) For $\frac{5}{2} < s \leq \frac{7}{2}$, $f_i(0) = h_i(0)$ $(i = 1, 2)$ y

$$\begin{aligned} &f_2(0) = f_1(0) + h_1'(0), h_2(0) = 2f_1(0) + 3f_1'(0) + f_1''(0) - h_1'(0), \\ &f_2'(0) = h_1'(0), f_2''(0) = -f_1(0) - f_1'(0) - h_1'(0). \end{aligned}$$

(sC4) For $\frac{7}{2} < s \leq \frac{9}{2}$, $f_i(0) = h_i(0)$ $(i = 1, 2)$ y

$$\begin{aligned} &h_2(0) = f_1(0) - 2f_1''(0) - f_1'''(0) - h_1'(0), f_2'(0) = h_1'(0), \\ &f_2''(0) = -f_1(0) - f_1'(0) - h_1'(0), h_2'(0) = 2h_1'(0) + 2f_1''(0) + f_1'''(0), \\ &f_2'''(0) = 2f_1'''(0) + 5f_1''(0) + 6f_1'(0) + f_1(0) + h_1'(0), h_1''(0) = -2h_1'(0) - f_1(0). \end{aligned}$$

Teorema 3.0.2. *Sea $\frac{1}{2} < s \leq \frac{9}{2}$. Si $f_1, f_2 \in H^s(\mathbb{R}^+)$, $h_1 \in H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)$, y $h_2 \in H^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$ satisfacen una de las condiciones de compatibilidad* **(sC1)**-**(sC4)**, *entonces la solución $W(f_1, f_2, h_1, h_2)$ del* **IBVP** *general (3.1) satisface el estimativo*

$$\begin{aligned} &\sup_{t>0} \|W(f_1, f_2, h_1, h_1)(\cdot, t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \\ &\qquad \leq C \left(\|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|h_2\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} \right). \end{aligned}$$

Demostración. Primero asuma que $\frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{2}$. En este caso, si se escribe la solución del **IBVP** general $W(f_1, f_2, h_1, h_2)$ como

$$W(f_1, f_2, h_1, h_2)(x, t) = V(x, t) - K(x, t),$$

con $K(x, t) = -(f_1(0), f_2(0))^T e^{-x-t}$, la observación anterior muestra que V satisface el **IBVP**

$$\begin{cases} \partial_t V(x, t) &= MV(x, t) + K_1(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ V(0, t) &= \begin{pmatrix} \tilde{h}_1(t) \\ \tilde{h}_2(t) \end{pmatrix}, \ V(x, 0) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(x) \\ \tilde{f}_2(x) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.3}$$

con K_1 que satisface

$$K_1(x,t) = \partial_t K - MK = \begin{pmatrix} (f_1(0)+f_2(0))e^{-x} \\ f_2(0)e^{-x} + f_1(0)B^{-1}A(e^{-x}) \end{pmatrix} e^{-t},$$

y condiciones de frontera e iniciales para el **IBVP** lineal no homogeneo (3.3) dadas por

$$\tilde{H}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_1(t) \\ \tilde{h}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{pmatrix} e^{-t}, \;\; \tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(x) \\ \tilde{f}_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{pmatrix} e^{-x}.$$

Ahora, sea $\psi \in H^{10}(\mathbb{R})$ una extensión de e^{-x} de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ y considere la función $K_2(\cdot,t) \in (L_t^1 H_0^s(\mathbb{R}^+))^2$ definida por

$$K_2(x,t) = (\tilde{K}_1(x) - \tilde{K}_1(0)e^{-x})e^{-t}, \quad \tilde{K}_1(x) = \begin{pmatrix} (f_1(0)+f_2(0))\psi(x) \\ f_2(0)\psi(x) + f_1(0)B^{-1}A(\psi(x)) \end{pmatrix}.$$

Del Lema (1.0.1), se tiene que $(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)^T \in H_0^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+) \times H_0^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$ y también que $\tilde{F} \in H_0^s(\mathbb{R}^+)$. Entonces, por los lemas (2.1.2) y (2.3.2) para V_2 (replazando K_1 por K_2), se tiene que

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} \|V_2(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} &\leq \sup_{t>0} \left(\|W_b(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \right) \\
&+ \sup_{t>0} \left(\|W_C(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} + \int_0^t \|W_C(K_2(\cdot,\tau))(\cdot,t-\tau)(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\, d\tau \right) \\
&\leq C \left(\|\tilde{h}_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|\tilde{h}_2\|_{H^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|\tilde{f}_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|\tilde{f}_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \right. \\
&\left. + \int_0^\infty \left(\|K_2(\cdot,\tau))\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \right) d\tau \right) \\
&\leq C_1 \left(\|\tilde{h}_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|\tilde{h}_2\|_{H^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|\tilde{f}_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|\tilde{f}_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \right. \\
&\left. + (|f_1(0)| + |f_2(0)|) \int_0^\infty e^{-\tau}\, d\tau \right).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Observe que $Z_2 = V - V_2$ satisface el **IBVP**

$$\begin{cases} \partial_t V(x,t) &= MV(x,t) + \tilde{K}_1(0)e^{-x-t}, \quad x>0, \quad t>0, \\ V(0,t) &= 0, \quad V(x,0) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

cuya solución está dada por

$$Z_2(x,t) = \tilde{K}_1(0) \int_0^t W_R(\psi)(x,t-\tau)e^{-t+\tau}\, d\tau.$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}\|Z_2(\cdot,t)\|_{Y^s} &\leq \|\tilde{K}_1(0)\| \int_0^t \|W_R(\psi)(\cdot,t-\tau)\|_{Y^s} e^{-t+\tau}\, d\tau \\ &\leq C(|f_1(0)|+|f_2(0)|) \int_0^\infty e^{-\tau}\, d\tau,\end{aligned}$$

de donde se concluye que $V = V_2 + Z_2 \in Y^s(\mathbb{R}^+)$. Más aún, dado que para $s > \frac{1}{2}$ se tiene que $|f_i(0)| \leq C\|f_i\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}$, entonces

$$\begin{aligned}\sup_{t>0} \|V(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \leq & C_2 \Big(\|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|h_2\|_{H^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)} \\ & + \|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \Big),\end{aligned}$$

Del anterior estimativo y dado que $\|e^{-x-\tau}\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \leq Ce^{-\tau}$, se tiene que

$$\begin{aligned}&\sup_{t>0} \|W(f_1,f_1,h_1,h_2)(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \\ &\leq \sup_{t>0} \big((|f_1(0)|+|f_2(0)|)\|\|e^{-t-x}\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|V(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \big) \\ &\leq C \Big(\|f_1\|_{L^\infty} + \|f_2\|_{L^\infty} + \|\tilde{h}_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|\tilde{h}_2\|_{H^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|\tilde{f}_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \\ &+ \|\tilde{f}_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \Big).\end{aligned}$$

Ahora, usando que $H^s(\mathbb{R}^+) \subset C_b(\mathbb{R}^+)$ para $s > \frac{1}{2}$, que $h_i(0) = f_i(0)$, y que

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}_i\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} &\leq \|f_i\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + |f_i(0)| \leq \|f_i\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f_i\|_{L^\infty} \leq C\|f_i\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}, \\ \|\tilde{h}_i\|_{H^{s-l_i}(\mathbb{R}^+)} &\leq \|h_i\|_{H^{s-l_i}(\mathbb{R}^+)} + |h_i(0)| \leq \|h_i\|_{H^{s-l_i}(\mathbb{R}^+)} + \|f_i\|_{L^\infty} \\ &\leq C(\|h_i\|_{H^{s-l_i}(\mathbb{R}^+)} + \|f_i\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}),\end{aligned}$$

con $l_1 = \frac{3}{2}$ y $l_2 = \frac{5}{2}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}&\sup_{t>0} \|W(f_1,f_2,h_1,h_1)(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \\ &\qquad \leq C \left(\|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|h_2\|_{H^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)} \right).\end{aligned}$$

Asuma ahora que $\frac{3}{2} < s \leq \frac{5}{2}$. En este caso, se puede escribir $W(f_1,f_2,h_1,h_2)$ como

$$W(f_1,f_2,h_1,h_2)(x,t) = W_b(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)(x,t) + W_C(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(x,t) + W_E(x,t) + \begin{pmatrix} \varphi_1(x)e^{-t} \\ \varphi_2(x)e^{-t} \end{pmatrix},$$

donde $\tilde{f}_i$, $\tilde{h}_i$ son funciones escogidas apropiadamente, $\varphi_1 \in H^{10}(\mathbb{R})$ es una extensión de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ de la función $(h_1(0) + x(f_1'(0) + h_1(0)))e^{-x}$, $\varphi_2 \in H^{10}(\mathbb{R})$ es una extensión de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ de la función $(2h_1(0)+f_1'(0)+x(f_1'(0)+h_1(0)))e^{-x}$, y W_E una solución del (**IVP**) no homogeneo sobre la recta

$$\begin{cases} \partial_t X(x,t) &= MX(x,t)+L(x,t), \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0, \\ X(0,x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.6}$$

con $\varphi_1 = -\varphi_2'$ y

$$L(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(x)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Observe que $\psi = B^{-1}A\varphi_2''+\varphi_2 \in H^5(\mathbb{R})$ y que la solución W_E del (**IVP**) (3.6) tiene la forma

$$W_E(x,t) = \int_0^t W_R(0,\psi(\cdot)e^{-\tau})(x,t-\tau)\,d\tau.$$

Además, que para $x\in\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(x) &= \begin{pmatrix} f_1(x)-(h_1(0)+x(f_1'(0)+h_1(0)))e^{-x} \\ f_2(x)-(2h_1(0)+f_1'(0)+x(f_1'(0)+h_1(0)))e^{-x} \end{pmatrix}, \\ \widetilde{F}'(x) &= \begin{pmatrix} f_1'(x)-(f_1'(0)-x(f_1'(0)+h_1(0)))e^{-x} \\ f_2(x)-(-h_1(0)-x(f_1'(0)+h_1(0)))e^{-x} \end{pmatrix}, \\ \widetilde{H}(t) &= H(t)-W_E(0,t)-\begin{pmatrix} h_1(0)e^{-t} \\ (2h_1(0)+f_1'(0))e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así, de las condiciones de compatibilidad, se tiene que $\tilde{F}\in Y_0^s(\mathbb{R}^+)$ y también que $\widetilde{H}\in H_0^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)\times H_0^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$ cuando $W_E(0,0)=(0,0)^T$. Se sigue entonces que $W_{b,C}=W_b(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)+W_C(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)$ satisface el (**IBVP**) (3.3) con $K_1=0$.
Para estimar la solución W_E, por Lema (2.2.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \sup_{t>0}\|W_E(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R})} &\le \int_0^t \|W_R(0,\psi)(\cdot,t-\tau)\|_{Y^s(\mathbb{R})}e^{-\tau}\,d\tau \\ &\le \int_0^\infty \|\psi\|_{H^s(\mathbb{R})}e^{-\tau}\,d\tau \\ &\le C\left(|h_1(0)|+|f_1(0)|\right) \\ &\le 2C\|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

pues $\psi = B^{-1}A\varphi_2''+\varphi_2\in H^5(\mathbb{R})$ para $x>0$ y $f_1(0)=h_1(0)$. Ahora, por un lado note que

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} \|W_E(0,t)\|_{L_t^2(\mathbb{R})} &\leq \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}} \|W_R(0,\psi(\cdot))(x,t-\tau)\|_{L_t^2(\mathbb{R})} e^{-\tau}\, d\tau \\
&\leq C \int_0^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}} \|\psi\|_{L_x^2(\mathbb{R})} e^{-\tau}\, d\tau \\
&\leq C(|h_1(0)| + |f_1'(0)|) \\
&\leq C\left(\|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\right).
\end{aligned}$$

De otro lado, se tiene que W_R es solución del **IBVP** (2.41), luego se tiene que $MW_R(f_1,f_2) = W_R((M(f_1,f_2)^T)^T)$ (ver (2.54)) y de este modo

$$MW_E(x,t) = \int_0^t W_R\left(M\begin{pmatrix}0\\ \psi e^{-\tau}\end{pmatrix}\right)(x,t-\tau)\,d\tau = \int_0^t W_R(\partial_x\psi e^{-\tau},0)(x,t-\tau)\,d\tau.$$

Más aún,

$$\begin{aligned}
\|MW_E(0,t)\|_{L_t^2(\mathbb{R}^+)} &\leq \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}} \|W_R(M(\partial_x\psi e^{\tau},0))(x,t-\tau)\|_{L_t^2(\mathbb{R}^+)}\, d\tau \\
C &\leq \int_0^\infty \|\psi\|_{H^2(\mathbb{R})} e^{-\tau}\, d\tau \\
&\leq C\left(|h_1(0)| + |f_1(0)|\right) \\
&\leq C\left(\|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Ahora, observe que

$$\partial_t^2 W_E = M^2 W_E + M\begin{pmatrix}0\\ \psi(x)e^{-t}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\ \psi(x)e^{-t}\end{pmatrix},$$

luego, de los lemas (2.2.4) y (2.2.6), se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^2 W_E(0,\cdot)\|_{L_t^2(\mathbb{R}^+)} &\leq \sup_{x\geq 0}\left(\|M^2 W_E(x,\cdot)\|_{L_t^2(\mathbb{R})}\right) + C\|\psi\|_{H^3(\mathbb{R})} \\
&\leq C\left(\|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\right) + C(|h_1(0) + |f_1(0)|) \\
&\leq C_1\left(\|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\right).
\end{aligned}$$

Usando el argumento de interpolación se concluye que

$$\|W_E(0,\cdot)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \leq C_1\left(\|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\right)$$

De la discusión anterior, se tiene que

$$W(f_1,f_2,h_1,h_2)(x,t) = W_{b,C}(x,t) + W_E(x,t) + \begin{pmatrix}\varphi_1(x)e^{-t}\\ \varphi_2(x)e^{-t}\end{pmatrix},$$

donde $W_{b,C} = W_b(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) + W_C(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$. En primer lugar, note que

$$\sup_{t>0} \|\varphi_i e^{-t}\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \leq C(|h_1(0)| + |f_1'(0)|) \leq C(\|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}).$$

En segundo lugar,

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} \|W_{b,C}(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} &\leq C\left(\|\tilde{h}_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|\tilde{h}_2\|_{H^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)}\right) \\
&\leq C\left(\|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|h_2\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)}\right),
\end{aligned}$$

usando la definición de $\widetilde{H}$ y las condiciones de compatibilidad (**sC2**). Así, de estos cálculos y los estimativos para W_E dados por (3.8), se obtiene finalmente que

$$\begin{aligned}
&\sup_{t>0} \|W(f_1,f_2,h_1,h_1)(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \\
&\qquad \leq C\left(\|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|h_1\|_{H^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|h_2\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)}\right).
\end{aligned}$$

Ahora, asuma que $\frac{5}{2} < s \leq \frac{7}{2}$. En este caso considere la descomposición de la solución $W(f_1,f_2,h_1,h_2)$ dada por

$$W(f_1,f_2,h_1,h_2)(x,t) = W_1(x,t) + W_b(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2)(x,t) + W_C(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)(x,t) + \begin{pmatrix} \varphi_1(x,t) \\ \varphi_2(x,t) \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

donde

$$\varphi_i(x,t) = (\varphi_{i,1}(x) + t\varphi_{i,2}(x))e^{-t-x} = (\tilde{\varphi}_{i,1}(x) + t\tilde{\varphi}_{i,2}(x))e^{-t}$$

$(i = 1,2)$ con $\tilde{\varphi}_{11}$ y $\tilde{\varphi}_{12}$ extensiones de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ de las funciones

$$\left(f_1(0) + (f_1(0) + f_1'(0))x + \frac{1}{2}(f_1(0) + 2f_1'(0) + f_1''(0))x^2\right) e^{-x}$$

y $(h_1'(0) + f_1(0))e^{-x}$, respectivamente. Las funciones $\tilde{f}_i$, $\tilde{h}_i$ serán escogidas apropiadamente más adelante, mientras que W_1 se define como la solución del **IVP** no homogeneo (3.6) sobre la recta, donde

$$L(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\psi_1(x) + t\psi_2(x))e^{-t} \end{pmatrix}$$

con

$$\psi_1 = B^{-1}A\partial_x\tilde{\varphi}_{1,1} + \tilde{\varphi}_{2,1} - \tilde{\varphi}_{2,2}, \quad \psi_2 = B^{-1}A\partial_x\tilde{\varphi}_{1,2} + \tilde{\varphi}_{2,2}.$$

Las funciones $\varphi_{2,i}(i = 1,2)$ puede ser escogidas para $x > 0$ como

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_{2,1}(x) &= (2f_1(0) + 3f_1'(0) + f_1''(0) - h_1(0) + (2f_1(0) + 3f_1'(0) + f_1''(0))x \\
&\qquad + \frac{1}{2}(f_1(0) + 2f_1'(0) + f_1''(0))x^2)e^{-x} \\
\tilde{\varphi}_{2,2}(x) &= -(f_1(0) + h_1'(0))e^{-x}.
\end{aligned}$$

Por un lado, se tien que W_1 tiene la forma

$$W_1(x,t) = \int_0^t W_R(0, (\psi_1(\cdot) + \tau\psi_2(\cdot))e^{-\tau})(x, t-\tau)\, d\tau.$$

Por otro lado, para $x \in \mathbb{R}^+$

$$\widetilde{F}^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} f_1^{(k)}(x) - \tilde{\varphi}_{1,1}^{(k)}(x) \\ f_2^{(k)}(x) - \tilde{\varphi}_{1,2}^{(k)}(x) \end{pmatrix}, k = 0, 1, 2,$$

$$\widetilde{H}^{(k)}(t) = H^{(k)}(t) - \partial_t^{(k)} W_1(0,t) - \partial_t^{(k)} \begin{pmatrix} \varphi_1(0,t)e^{-t} \\ \varphi_2(0,t)e^{-t} \end{pmatrix}, k = 0, 1.$$

De las condicones de compatibilidad se tiene que $\tilde{F} \in Y_0^s(\mathbb{R}^+)$ y $\widetilde{H} \in Y_0^{s-\frac{3}{2}, s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$. Así, se tiene que $W_{b,C} = W_b(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) + W_C(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ satisface el **IBVP** (3.3) con $K_1 = 0$.

En primer lugar se acota la solución W_1. Utilizando el lema (2.2.4), se tiene que

$$\begin{aligned}
\|W_1(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R})} &\leq \int_0^t \|W_R(0,\psi)\|_{Y^s(\mathbb{R})} e^{-\tau}\, d\tau \\
&\leq \int_0^\infty \|\psi\|_{H^s(\mathbb{R})} e^{-\tau}\, d\tau \\
&\leq \int_0^\infty (\|\psi_1\|_{H^s(\mathbb{R})} + \tau\|\psi_2\|_{H^s(\mathbb{R})}) e^{-\tau}\, d\tau \\
&\leq C\left(|h_1(0)| + |f_1(0)| + |f_1'(0)| + |f_1''(0)|\right) \\
&\leq C\left(\|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\right),
\end{aligned}$$

usando que $f_2'(0) = h_1'(0)$, $s > \frac{5}{2}$, $s - \frac{3}{2} > \frac{1}{2}$ y que

$$\begin{aligned}
||\psi_i||_{H^s} &\leq ||\tilde{\varphi}_{1,1}||_{H^{s+1}} + ||\tilde{\varphi}_{1,2}||_{H^{s+1}} + ||\tilde{\varphi}_{2,1}||_{H^s} + ||\tilde{\varphi}_{2,2}|_{H^s} \\
&\leq C\left(|h_1(0)| + |f_1(0)| + |f_1'(0)| + |f_1''(0)|\right) \\
&\leq C\left(\|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\right).
\end{aligned}$$

De manera similar se puede observar que

$$\|\varphi_i(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R})} \leq C\left(\|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\right).$$

Por otro lado, usando que $\tilde{F} \in Y_0^s(\mathbb{R}^+)$ y $\tilde{H} \in Y_0^{s-\frac{3}{2}, s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$ de las condiciones de compatibilidad (**sC3**), se tiene que $W(f_1, f_2, h_1, h_2)$ tiene la forma (3.9), y por cálculos similares a los casos previos, se puede ver que

$$\begin{aligned}
&\sup_{t>0} \|W(f_1, f_2, h_1, h_1)(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \\
&\qquad \leq C\left(\|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|h_2\|_{H^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)}\right).
\end{aligned}$$

Ahora, considere $\frac{7}{2} < s \leq \frac{9}{2}$. En este caso, se descompone $W(f_1, f_2, h_1, h_2)$ como

$$W(f_1, f_2, h_1, h_2)(x,t) = W_2(x,t) + W_b(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)(x,t) + W_C(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)(x,t) + \begin{pmatrix} \varphi_1(x,t) \\ \varphi_2(x,t) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

donde para $i = 1, 2$,

$$\varphi_i(x,t) = (\varphi_{i,1}(x) + t\varphi_{i,2}(x))e^{-t-x} = (\tilde{\varphi}_{i,1}(x) + t\tilde{\varphi}_{i,2}(x))e^{-t}$$

con $\tilde{\varphi}_{11}$ y $\tilde{\varphi}_{12}$ extensiones de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ de las funciones

$$\Big[f_1(0) + (f_1(0) + f_1'(0))x + \frac{1}{2}(f_1(0) + 2f_1'(0) + f_1''(0))x^2 \\ + \frac{1}{6}(f_1(0) + 3f_1'(0) + 3f''(0) + f_1'''(0))x^3\Big] e^{-x}$$

y $(h_1'(0) + f_1(0))e^{-x}$, respectivamente. Para este caso, $\varphi_{2,i}(i = 1, 2)$ pueden ser escogidas para $x > 0$ como

$$\tilde{\varphi}_{2,1}(x) = (f_1(0) - 2f_1''(0) - f_1'''(0) - h_1'(0) + (f_1(0) - 2f_1''(0) - f_1'''(0))x \\ - \frac{1}{2}(f_1'(0) + 2f_1''(0) + f_1'''(0))x^2 + \frac{1}{6}(f_1'''(0) + 3f_1''(0) + 3f_1'(0) - f_1(0))x^3)e^{-x},$$

$\tilde{\varphi}_{2,2}(x) = (f_1(0) + h_1'(0))e^{-x}$.
Además, si se define W_2 como

$$W_2(x,t) = \int_0^t W_R(0, (\psi_1(\cdot) + \tau\psi_2(\cdot))e^{-\tau})(x, t-\tau)\, d\tau,$$

entonces W_2 es solución del **IVP** no homogeneo (3.6) en la recta con

$$L(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\psi_1(x) + t\psi_2(x))e^{-t} \end{pmatrix},$$

donde las funciones ψ_1, ψ_2 están definidas como

$$\psi_1 = B^{-1}A\partial_x\tilde{\varphi}_{1,1} + \tilde{\varphi}_{2,1} - \tilde{\varphi}_{2,2}, \quad \psi_2 = B^{-1}A\partial_x\tilde{\varphi}_{1,2} + \tilde{\varphi}_{2,2},$$

con $\psi_1(0) = 0$.
De las condiciones de compatibilidad (**sC4**), se tiene que $\tilde{F} \in Y_0^s(\mathbb{R}^+)$ y que $\widetilde{H} \in Y_0^{s-\frac{3}{2}, s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$. De esta manera, usando argumentos y cálculos similares como en los casos previos, se puede ver que

$$\sup_{t>0} \|W(f_1, f_2, h_1, h_1)(\cdot, t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \\ \leq C\left(\|f_1\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|f_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|h_1\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} + \|h_2\|_{H^{s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)}\right).$$

□

Capítulo 4

IBVP no lineal

El objetivo de este capítulo es obtener un resultado de existencia local para el **IBVP** (2.1), para ello se reescribe el problema como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t X(x,t) & = MX(x,t) + G(X)(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ X(x,0) & = F(x), \quad X(0,t) = H(t), \end{array} \right. . \tag{4.1}$$

donde F y G denotan las condiciones iniciales y de frontera como en el capítulo anterior, y donde la parte no lineal está dada por $G(q,r) = G_1(q,r) + G_2(q,r)$, con

$$G_1(q,r) = \begin{pmatrix} 0 \\ -B^{-1}(r(q^p)_x) \end{pmatrix}, \quad G_2(q,r) = \begin{pmatrix} 0 \\ -B^{-1}(2q^p r_x) \end{pmatrix}.$$

4.1. IBVP no lineal: existencia local

Antes de abordar el **IBVP** no lineal (4.1), se estudiará un caso particular de este problema utilizando el resultado del **IBVP** lineal homogéneo obtenido en el capítulo anterior.

Teorema 4.1.1. *Sea $\frac{1}{2} < s \leq \frac{9}{2}$ y $F \in L^1([0,T] : Y^s(\mathbb{R}^+))$ para $T > 0$. Entonces el* **IBVP**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t X(x,t) & = MX(x,t) + F(x,t), \quad x > 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ X(x,0) & = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X(0,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{4.2}$$

posee una única solución $W_I \in C([0,T] : Y^s(\mathbb{R}^+))$ tal que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|W_I(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \leq C \int_0^T \|F(\cdot,\tau)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \, d\tau.$$

Demostración. Antes de abordar el problema para un $F \in L^1([0,T] : Y^s(\mathbb{R}^+))$ en general, se resolverá un caso particular tomando un $F \in L^1([0,T] : Y^s(\mathbb{R}^+))$ de la forma $F(x,t) = g(t)e^{-x}$. Sea $\psi \in H^{10}(\mathbb{R})$ una extensión de e^{-x} de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$, y $g_j \in (C_0^\infty(0,T))^2$ tal que

$$\int_0^T |g_j(t) - g(t)|\, dt \to 0, \quad \text{cuando } j \to \infty.$$

Si se define W_j como

$$W_j(x,t) = \int_0^t W_R(g_j(\tau)\psi)(x, t-\tau)\, d\tau,$$

se puede ver W_j es una solución clásica del problema de valor inicial puro

$$\begin{cases} \partial_t W(x,t) &= MW(x,t) + g_j(t)\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ W(x,0) &= (0,0)^t \end{cases} \tag{4.3}$$

como en el lema (2.2.6), se tiene que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|W_j(x,\cdot)\|_{Y^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R})} \leq C \int_0^T \|g_j(\tau)\psi(\cdot)\|_{Y^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R})}\, d\tau \leq \int_0^T \|g_j(\tau))\|\, d\tau.$$

Más aún, como $W_j(0,0) = \partial_t W_j(0,0) = 0$, también se obtiene que

$$\|W_j(0,\cdot)\|_{Y_0^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R})} \leq C \int_0^T \|g_j(\tau)\psi(\cdot)\|_{Y^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R})}\, d\tau \leq \int_0^T \|g_j(\tau))\|\, d\tau. \tag{4.4}$$

Ahora, si se define $Z_j(x,t) = W_j(x,t) - W_b(W_j(0,\cdot))(x,t)$ se tiene que Z_j satisface el **IBVP** (4.2) con término no homogéneo $G(x,t) = g_j(t)\psi(x)$ y también que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|Z_j(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \leq C \int_0^T \|g_j(\tau)\|\, d\tau.$$

Además, por lemas (2.2.6) y (4.4),

$$\begin{aligned} \sup_{0\leq t\leq T} \|W_j(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} &\leq \sup_{0\leq t\leq T} \|Z_j(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} + \sup_{0\leq t\leq T} \|W_b(W_j(0,\cdot))\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \\ &\leq C \int_0^T \|g_j(\tau)\|\, d\tau + \sup_{0\leq t\leq T} \|W_j(0,\cdot)\|_{Y^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^+)} \\ &\leq C_1 \int_0^T \|g_j(\tau)\|\, d\tau. \end{aligned}$$

Finalmente, se puede ver que $(W_j)_j$ en $(C_0^\infty([0,T] : Y^s(\mathbb{R}^+)))^2$ es una sucesión de Cauchy con límite W. En efecto,

$$\|W_j(\cdot,t) - W_k(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \leq \int_0^t \|g_j(\tau) - g_k(\tau)\|\, d\tau.$$

Así, de éste hecho, de los cálculos previos y tomando límite cuando $j \to \infty$, se concluye que $W(x,t) = \lim_{j\to\infty} W_j(x,t)$ es una solución del **IBVP** (4.3) reemplazando g_j por g, y también que

$$\sup_{0\le t\le T} \|W(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \le C \int_0^T \|g(\tau)\|\, d\tau.$$

Ahora asuma que $\frac{1}{2} < s \le \frac{3}{2}$ y defina $\tilde{F}(x,t) = F(x,t) - F(0,t)e^{-x}$. Considere U y V soluciones del **IBVP** (4.2) con parte no homogénea $G(x,t) = \tilde{F}(x,t)$ y $G(x,t) = F(0,t)e^{-x} = g(t)e^{-x}$, respectivamente. Por un lado, de la fórmula de Duhamel se sabe que la solución U tiene la forma

$$U(x,t) = \int_0^T W(\tilde{F}(\cdot,\tau),0,0)(x,t-\tau)\, d\tau,$$

donde W representa la solución del **IBVP** (3.1). Como $U(x,0) = U(0,t) = 0$, satisface la hipótesis del teorema (3.0.2), entonces

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le t\le T} \|U(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} &\le C \sup_{0\le t\le T} \int_0^T \|W(\tilde{F}(\cdot,\tau)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\, d\tau \\
&\le C \int_0^T \left(\|F(\cdot,\tau)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} + \|F(0,\tau)\|\right)\, d\tau \\
&\le C_1 \int_0^T \|F(\cdot,\tau)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\, d\tau,
\end{aligned}$$

dado que $H^s(\mathbb{R}^+) \subset C_b(\mathbb{R}^+)$ para $s > \frac{1}{2}$. Por otro lado, aplicando el argumento previo para $g(t) = F(0,t)$, se tiene también que

$$\sup_{0\le t\le T} \|V(\cdot,t)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \le C \int_0^T \|F(0,\tau)\|\, d\tau \le C_1 \int_0^T \|F(\cdot,\tau)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\, d\tau.$$

Como $W_I = U + V$, se concluye el estimativo deseado para el caso $\frac{1}{2} < s \le \frac{3}{2}$. En los casos restantes se procede de manera similar, considerando una $\tilde{F}$ apropiada. En el caso $\frac{3}{2} < s \le \frac{5}{2}$, se utiliza

$$\tilde{F}(x,t) = F(x,t) - \left(F(0,t) + (\partial_x F(0,t) + F(0,t))x\right) e^{-x},$$

para $\frac{5}{2} < s \le \frac{7}{2}$ se toma

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(x,t) = F(x,t) - \Big(F(0,t) &+ (\partial_x F(0,t) + F(0,t))x + \\
&\frac{1}{2}(\partial_x^2 F(0,t) + 2\partial_x F(0,t) + F(0,t))x^2\Big) e^{-x},
\end{aligned}$$

y finalmente, para $\frac{7}{2} < s \leq \frac{9}{2}$,

$$\widetilde{F}(x,t) = F(x,t) - e^{-x}\Bigg(F(0,t) + (\partial_x F(0,t) + F(0,t))x + \frac{1}{2}(\partial_x^2 F(0,t)+$$
$$2\partial_x F(0,t) + F(0,t))x^2 + \frac{1}{6}(\partial_x^3 F(0,t) + 3\partial_x^2 F(0,t) + 3\partial_x F(0,t) + F(0,t))x^3\Bigg)$$

□

Ahora considere el espacio $\mathcal{Y}^s$ como

$$\mathcal{Y}^s(\mathbb{R}^+) = Y^s(\mathbb{R}^+) \times Y^{s-\frac{3}{2},s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+),$$

y para cada $T > 0$ y $\frac{1}{2} < s \leq \frac{9}{2}$, defina el espacio $Z_T^s = C([0,T] : Y^s)$ con norma,

$$\|U\|_{Z_T^s} = \sup_{t\in[0,T]} \|U(\cdot,t)\|_{Y^s}.$$

De esta manera, usando las **condiciones de s-compatibilidad** para $\frac{1}{2} < s \leq \frac{9}{2}$, aplicadas a la pareja de funciones $(F,H) \in \mathcal{Y}^s(\mathbb{R}^+)$, se tiene el siguiente resultado de existencia local para el **IBVP** (2.1).

Teorema 4.1.2. *Sea $\frac{1}{2} < s \leq \frac{9}{2}$ y $(F,H) \in \mathcal{Y}^s$ que satisfacen una de las condiciones de s-compatibilidad (***sC1***)-(***sC4***). Entonces existe*

$$T_0 = T_0\left(\|F\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)}, \|H\|_{Y^{s-\frac{3}{2},s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)}\right) > 0$$

tal que el **IBVP** *(4.1) tiene una única solución $X = \mathcal{K}(F,H) \in Z_{T_0}^s$. Más aún, para $0 < T_1 < T_0$, existe una vecindad $\mathcal{U}_\epsilon$ de $(F,H) \in \mathcal{Y}^s$ tal que la aplicación solución $\mathcal{K} : U_\epsilon \to Z_T^s$ es Lipschitz.*

Demostración. Sea $\mathcal{X}_T^R = \{U \in Z_T^s : \|U\|_{Z_T^s} \leq R\}$ una bola de radio $R > 0$ en Z_T^s, con T y R constantes positivas que se determinarán más adelante. Considere la aplicación solución Φ definida como

$$\Phi(U) = W(F,H) + W_I(G(U)).$$

Primero se probará que para $(F,H) \in \mathcal{Y}^s$ que satisface una de las condiciones de s-compatibilidad se tiene que Φ es una contracción de $\mathcal{X}_T^R$ en $\mathcal{X}_T^R$ para $T > 0$ y $R > 0$ apropiados. Sean $U, V \in X_T^R$ y

$$R_0 = \|F\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} + \|H\|_{Y^{s-\frac{3}{2},s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)}.$$

Luego, por teoremas (3.0.2) y (4.1.1) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(U)\|_{Z_T^s} &\leq \|W(F,H)\|_{Z_T^s} + \|W_I(G(U))\|_{Z_T^s} \\
&\leq CR_0 + C\int_0^T \|G(U)(\cdot,\tau)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\, d\tau \\
&\leq CR_0 + CT \sup_{0\leq\tau\leq T} \|G(U)(\cdot,\tau)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)}.
\end{aligned}
$$

Ahora, para los estimativos no lineales, se utilizará la *Ley de Multiplicación de Sobolev:* Sea $d \geq 1$, y sean s_1, s_2 y t tales que cumplen

$$
s_1+s_2 \geq 0,\ \ t \leq s_1+s_2,\ \ t < s_1+s_2-\frac{d}{2},\ \text{ o }\ s_1+s_2 > 0,\ \ t < s_1+s_2,\ \ t \leq s_1+s_2-\frac{d}{2},
$$

entonces, se tiene que

$$
\|\psi\varphi\|_{H^t(\mathbb{R}^d)} \leq \|\psi\|_{H^{s_1}(\mathbb{R}^d)}\|\varphi\|_{H^{s_2}(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.5}
$$

Así, sea $V_i = (q_i, r_i) \in Y^s(\mathbb{R}^+)$ $(i = 1, 2)$. Usando el hecho que B^{-1} tiene orden (-2), y tomando $t = s-2, s_1 = s$ y $s_2 = s-1$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\|G_1(V_1) - G_1(V_2)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} = \| -B^{-1}\left(r_1(q_1^p)_x - r_2(q_2^p)_x\right)\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} \\
&\leq C(b)\left(\|(r_1-r_2)(q_1^p)_x\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^+)} + \|r_2(q_1^p - q_2^p)_x\|_{H^{s-2}(\mathbb{R}^+)}\right) \\
&\leq C(b)\left(\|r_1-r_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\|(q_1^p)_x\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^+)} + \|r_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\|(q_1^p-q_2^p)_x\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^+)}\right) \\
&\leq C(b)\left(\|r_1-r_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\|q_1\|^p_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|r_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\|q_1^p-q_2^p\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\right) \\
&\leq 2C(b)\Bigg(2\|r_1-r_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\|q_1\|^p_{H^s(\mathbb{R}^+)} \\
&\qquad +p\|r_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\|q_1-q_2\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}\left(\|q_1\|^{p-1}_{H^s(\mathbb{R}^+)} + \|q_2\|^{p-1}_{H^s(\mathbb{R}^+)}\right)\Bigg) \\
&\leq C_1(p,b)\|V_1-V_2\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\left(\|V_1\|^p_{Y^s(\mathbb{R}^+)} + \|V_2\|^p_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\right).
\end{aligned}
$$

Un estimativo similar muestra que

$$
\|G_2(V_1) - G_2(V_2)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \leq C_1(p,b)\|V_1-V_2\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\left(\|V_1\|^p_{Y^s(\mathbb{R}^+)} + \|V_2\|^p_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\right).
$$

Más aún, para $V_1 = V$ y $V_2 = 0$,

$$
\|G(V)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)} \leq C_1(p,b)\left(\|V\|^{p+1}_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\right).
$$

Luego, de este hecho se tiene que

$$
\|\Phi(U)\|_{Z_T^s} \leq CR_0 + C_1(p,b)T\|U\|^{p+1}_{Z_T^s}, \tag{4.6}
$$

y también que

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi(U)-\Phi(V)\|_{Z_T^s} \leq \|W_I(G(U)-G(V))\|_{Z_T^s} \\
&\leq C\int_0^T \|G(U)(\cdot,\tau)-G(V)(\cdot,\tau)\|_{Y^2(\mathbb{R}^+)}\,d\tau \\
&\leq C_1(p,b)\int_0^T \|U(\tau)-V(\tau)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\left(\|U(\tau)\|^p_{Y^s(\mathbb{R}^+)}+\|V(\tau)\|^p_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\right)\,d\tau \\
&\leq C_1(p,b)T\sup_{0\leq\tau\leq T}\|U(\tau)-V(\tau)\|_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\left(\|U(\tau)\|^p_{Y^s(\mathbb{R}^+)}+\|V(\tau)\|^p_{Y^s(\mathbb{R}^+)}\right) \\
&\leq C_1(p,b)T\|U-V\|_{Z_T^s}\left(\|U\|^p_{Z_T^s}+\|V\|^p_{Z_T^s}\right) \\
&\leq 2C_1(p,b)R^pT\|U-V\|_{Z_T^s}. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Ahora, sea $R=2CR_0$ y $T=T_0>0$ tal que

$$
2C_1(p,b)R^pT_0=\frac{1}{N}, \qquad (4.8)
$$

con $N>2^p+1$ y $N\in\mathbb{N}$. De (4.8) y de los estimativos (4.6) y (4.7), se tiene que Φ es una contracción de $X^R_{T_0}$ en $X^R_{T_0}$, luego, el teorema de Contracción garantiza la existencia y unicidad de una solución local para el **IBVP** en el espacio $X^R_{T_0}$. Ahora, lo que queda por probar es que para cada $0<T_1<T_0$ la función $\mathcal{K}$ de $\mathcal{U}_\epsilon$ a $C([0;T_1]:Y^s(\mathbb{R}^+))$ es Lipschitz, donde $\mathcal{U}_\epsilon$ es una vecindad de $(F,H)\in\mathcal{Y}^s$ y $\epsilon>0$ un valor por determinar. Sea $(\tilde{F}_i,\tilde{H}_i)\in\mathcal{U}_\epsilon$ para $i=1,2$, y sean U, U_1 y U_2 las tres soluciones correspondientes del **IBVP** para datos iniciales y de frontera $\mathcal{G}=(F,H)$, $\mathcal{G}_1=(\tilde{F}_1,\tilde{H}_1)$ y $\mathcal{G}_2=(\tilde{F}_2,\tilde{H}_2)$, respectivamente. De éste modo, se tiene que

$$
U(x,t)-U_1(x,t)=W(F-F_1,H-H_1)(x,t)+W_I(G(U)-G(U_1))(x,t).
$$

Así, de manera similar que para (4.7), se tiene que para $T\leq T_1<T_0$,

$$
\begin{aligned}
\|U-U_1\|_{Z_T^s} &\leq C\|\mathcal{G}-\mathcal{G}_1\|_{\mathcal{Y}^s(\mathbb{R}^+)}+2C_1(p,b)R^pT_1\|U-U_1\|_{Z_T^s} \\
&\leq \epsilon C+\frac{1}{N}\|U-V\|_{Z_T^s} \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Ahora, considere la función

$$
l(x)=-(N-1)x+NC\epsilon.
$$

Note que $l(0)=NC\epsilon>0$ y $l\left(\frac{NC\epsilon}{N-1}\right)=0$. Más aún, de la desigualdad (4.9) para T_1, se tiene que $l(y)\geq 0$ para $y=\|U-U_1\|_{Z^s_{T_1}}$, de donde $\|U-U_1\|_{Z^s_{T_1}}\leq\frac{NC\epsilon}{N-1}$. Luego,

$$
\|U_1\|_{Z^s_{T_1}}\leq\|U-U_1\|_{Z^s_{T_1}}+\|U\|_{Z^s_{T_1}}\leq R+\frac{NC\epsilon}{N-1}, \qquad (4.10)
$$

y de manera similar

$$\|U_2\|_{Z^s_{T_1}} \leq R + \frac{NC\epsilon}{N-1}. \tag{4.11}$$

Ahora, note que

$$U_1(x,t) - U_2(x,t) = W(F_1 - F_2, H_1 - H_2)(x,t) + W_I(G_1(U) - G(U_2))(x,t).$$

Si definimos $\epsilon > 0$ tal que $\frac{NC\epsilon}{N-1} < R$. De un argumento similar que en (4.7) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|U_1 - U_2\|_{Z^s_{T_1}} &\leq C\|\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_2\|_{\mathcal{Y}^s(\mathbb{R}^+)} + C_1(p,b)T_1\|U_1 - U_2\|_{Z^s_{T_1}}\left(\|U_1\|^p_{Z^s_{T_1}} + \|U_2\|^p_{Z^s_{T_1}}\right)\\
&\leq C\|\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_2\|_{\mathcal{Y}^s(\mathbb{R}^+)} + 2C_1(p,b)T_1\left(R + \frac{NC\epsilon}{N-1}\right)^p\|U_1 - U_2\|_{Z^s_{T_1}}\\
&\leq C\|\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_2\|_{\mathcal{Y}^s(\mathbb{R}^+)} + 2C_1(p,b)R^pT_1 2^p\|U_1 - U_2\|_{Z^s_{T_1}}\\
&\leq C\|\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_2\|_{\mathcal{Y}^s(\mathbb{R}^+)} + \frac{2^p}{N}\|U_1 - U_2\|_{Z^s_{T_1}}
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\|U_1 - U_2\|_{Z^s_T} \leq \left(\frac{N}{N-2^p}\right)\|\mathcal{G} - \mathcal{G}_1\|_{\mathcal{Y}^s(\mathbb{R}^+)},$$

de donde se concluye que la función solución $\mathcal{K}$ de $\mathcal{U}_\epsilon$ a $Z^s_{T_1}$ es Lipschitz. □

4.2. IBVP no lineal: existencia global

En esta sección se considera para $s \geq 1$ la existencia global del **IBVP** con condición de frontera homogénea

$$\begin{cases} \partial_t X(x,t) &= MX(x,t) + G(X)(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0,\\ X(x,0) &= F(x), \quad X(0,t) = 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

donde el valor inicial $F = (f_1, f_2) \in Y^s_0(\mathbb{R}^+)$ y es tal que

$$\int_0^\infty f_1(x)\,dx = 0.$$

De la sección anterior, el **IBVP** (4.12) está localmente bien puesto y existe un tiempo T_0 que depende de la cantidad $\|F\|_{Y^s_0(\mathbb{R}^+)}$. Más aún, se puede observar que cuanto mayor es $\|F\|_{Y^s_0(\mathbb{R}^+)}$ menor es T_0. En esta sección se establece la existencia global del **IBVP** (4.12) mostrando que las siguientes cantidades se conservan en el tiempo $t > 0$

$$\mathcal{M}(q)(x,t) = \int_0^\infty q(x,t)\,dx, \tag{4.13}$$

$$\mathcal{E}(q,r)(x,t) = \int_0^\infty \left(q^2 + aq_x^2 + r^2 + br_x^2\right)\,dx \tag{4.14}$$

En efecto, si se asume que (q,r) es una solución suave del sistema (2.1) tal que $(q,r)(\cdot,t) \in Y^s(\mathbb{R}^+)$ y se integra la primera ecuación,

$$\partial_t \left[\int_0^\infty q(x,t)\,dx\right] = \int_0^\infty q_t(x,t)\,dx = \int_0^\infty r_x(x,t)\,dx = -r(0,t) = -h_2(t) = 0,$$

Ahora, multiplicando la segunda ecuación por r e integrando, se obtiene

$$\int_0^\infty (I - b\partial_x^2)r_t r\,dx = \int_0^\infty \left((I - a\partial_x^2)q_x + prq^{p-1}q_x + 2q^p r_x\right) r\,dx.$$

En primer lugar,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(prq^{p-1}q_x + 2q^p r_x\right) r\,dx &= \int_0^\infty \left(r^2(q^p)_x + q^p(r^2)_x\right)\,dx \\ &= \int_0^\infty \left(r^2q^p\right)_x\,dx = -r^2(0,t)q^p(0,t) = 0\end{aligned}$$

y en segundo lugar

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left((I - a\partial_x^2)q_x\right) r\,dx &= \int_0^\infty \left(q_x r - a\partial_x^3 q r\right)\,dx \\ &= (q - a\partial_x^2 q)r\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(qr_x - a\partial_x^2 q r_x\right)\,dx \\ &= -\int_0^\infty \left(qq_t - a\partial_x^2 q q_t\right)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\partial_t\left(\int_0^\infty q^2\,dx\right) + a(q_x q_t)\Big|_0^\infty - a\int_0^\infty (q_x q_{xt})\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\partial_t\left(\int_0^\infty (q^2 + aq_x^2)\,dx\right) + a(q_x q_t)\Big|_0^\infty \\ &= -\frac{1}{2}\partial_t\left(\int_0^\infty (q^2 + aq_x^2)\,dx\right)\end{aligned}$$

ya que $q_t(0,t) = h_1(t) = 0$ for $t \geq 0$. Finalmente, siempre y cuando la solución exista, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left((I - b\partial_x^2)r_t\right) r\,dx &= \frac{1}{2}\partial_t\left(\int_0^\infty r^2\,dx\right) - b\left(r_{xt}r\Big|_0^\infty - \int_0^\infty r_{xt}r_x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\partial_t\left(\int_0^\infty (r^2 + br_x^2)\,dx\right).\end{aligned}$$

En otras palabras, si (q,r) es una solución suave del **IBVP** (4.12), se tiene que las cantidades (4.13) y (4.14) se conservan en el tiempo, de lo cual se obtiene la existencia de las cantidades conservadas con respecto a $t>0$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(q,r)(x,t) = \mathcal{E}(q,r)(0,t) &= \int_0^\infty \left(f_1^2 + a(\partial_x f_1)^2 + f_2^2 + b(\partial_x f_2)^2\right) dx \\ &\leq C\|F\|^2_{Y_0^1(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Teorema 4.2.1. *Para cada $F \in Y_0^1(\mathbb{R}^+)$, el* **IBVP** *(4.12) tiene solución única global $U \in C([0,\infty) : Y_0^1(\mathbb{R}^+))$ que satisface*

$$\sup_{t\geq 0} \|U\|_{Y_0^1(\mathbb{R}^+)} \leq C\|F\|_{Y_0^1(\mathbb{R}^+)}.$$

Demostración. Sea $(f_{1,j}, f_{2,j}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$\|f_i - f_{i,j}\|_{H_0^1(\mathbb{R}^+)} \to 0, \quad j \to \infty, \quad i = 1,2.$$

Sea $U_j = (q_j, r_j)$ la solución del **IBVP** (4.12) con condición inicial $F_j = (f_{1,j}, f_{2,j})$. Así, se tiene que

$$U_j(x,t) = W(F_j, 0)(x,t) + W_I(G(U_j))(x,t). \tag{4.16}$$

Más aún, $U_j \in C^2([0,T] : Y^4(\mathbb{R}^+))$ y utilizando que la aplicación solución es Lipschitz se obtiene que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|U_j(\cdot,t) - U_k(\cdot,t)\|_{Y^1(\mathbb{R}^+)} \to 0, \quad j,k \to +\infty. \tag{4.17}$$

Para $1 \leq k \leq 4$, $\partial_x^k U_j \in C([0,T] : Y^{4-k}(\mathbb{R}^+))$. Dado que $Y^1(\mathbb{R}^+) \subset C(\mathbb{R}^+)$, también se tiene que $\partial_x^k U_j \in C^2([0,T] : C(\mathbb{R}^+))$ para $0 \leq k \leq 3$. En particular, se concluye que

$$\lim_{x\to\infty} \partial_x^k U_j(x,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad 0 \leq k \leq 3.$$

Sea $U \in C([0,T] : Y^1(\mathbb{R}^+))$ el límite de la sucesión $(U_j)_j$, cuando $j \to +\infty$ (ver (4.17)). Así, de (4.16), se tiene que

$$U(x,t) = W(F,0)(x,t) + W_I(G(U))(x,t), \quad \lim_{j\to\infty} U_j(0,t) = U(0,t) = 0$$

lo que significa que U es una solución del **IBVP** (4.12) con $U \in C([0,T] : Y_0^1(\mathbb{R}^+))$. Ahora, de la discusión anterior (ver (4.15)), se sabe que la energía

$$\mathcal{E}(U_j)(t) = \mathcal{E}(F_j), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Más aún, tomando límite cuando $j \to +\infty$ en la energía, se concluye que

$$\mathcal{E}(U)(t) = \mathcal{E}(F), \quad 0 \leq t \leq T.$$

De este modo, se puede observar que existe una constante positiva C_1 tal que

$$C_1^{-1}\|F\|_{Y^1(\mathbb{R}^+)} \leq \sqrt{\mathcal{E}(F)} \leq C_1\|F\|_{Y^1(\mathbb{R}^+)}.$$

Lo anterior garantiza que cada solución local puede ser extendida en el tiempo. En otras plabras, se tiene que U es solución del **IBVP** (4.12) tal que

$$U \in C([0, +\infty) : Y_0^1(\mathbb{R}^+)).$$

□

Finalmente, se tiene un resultado de existencia global para la ecuación de Benney-Luke que sigue directamente del resultado anterior, la existencia de la cantidad $\mathcal{M}$ dada por (4.13) la cual se conserva en el tiempo, y la observación (2.0.1) que permite establecer la equivalencia entre el **IBVP** con la condición de frontera homogénea (4.12) y el **IBVP** con condición de frontera homogénea para el modelo de Benney-Luke

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + au_{xxxx} - bu_{xxtt} + pu_t u_x^{p-1} u_{xx} + 2u_x^p u_{xt} & = 0, \ x > 0, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_t(0,t) & = 0 \\ u_x(x,0) = f_1(x), \quad u_t(x,0) & = f_2(x), \end{cases}$$

Corolario 4.2.2. *Para cada $F = (f_1, f_2)^T \in Y_0^1(\mathbb{R}^+)$, el* **IBVP** *con condición de frontera homogénea para la ecuación de Benney-Luke (3) tiene solución única global $u \in C([0,\infty) : \mathcal{V}^2(\mathbb{R}^+))$ que satisface*

$$\sup_{t \geq 0} \|u(\cdot, t)\|_{\mathcal{V}^2(\mathbb{R}^+)} \leq C\|F\|_{H^1(\mathbb{R}^+)}.$$

Conclusiones

- Se escribió el **IBVP** (3) asociado a la ecuación de Benney-Luke como un **IBVP** de primer orden (2.1), y se logró obtener representaciones explícitas y estimativos de la soluciones de tres subproblemas lineales homogéneos ($G \equiv 0$) asociados a este problema de primer orden: un **IBVP** lineal con condiciones iniciales cero y datos de frontera $(h_1, h_2) \in Y_0^{s-\frac{3}{2}, s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$ sobre la semirecta, un **IVP** lineal con valores iniciales $(f_1, f_2) \in Y^s(\mathbb{R})$ sobre la recta y un **IBVP** con datos de frontera cero y valores iniciales $(f_1, f_2) \in Y_0^s(\mathbb{R}^+)$ en la semirecta.

- Para la obtención explícita de las soluciones de los dos primeros subproblemas mencionados anteriormente se implementaron satisfactoriamente las técnicas de la tranformada de Laplace (primer subproblema) y la técnica de la transformada de Fourier (segundo subproblema), como lo hicieron J. Bona, S. Sun, y B. Zhang en [6] en el **IBVP** para la ecuación KdV y como lo hizo Xue en [10] en el **IBVP** para la "buena" ecuación de Boussinesq.

- Se obtuvo un estimativo para el **IBVP** lineal homogéneo general (2.2) con valores iniciales $(f_1, f_2) \in Y_0^s(\mathbb{R}^+)$ y datos de frontera $(h_1, h_2) \in Y_0^{s-\frac{3}{2}, s-\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^+)$ que satisfacen una de las condiciones de compatibilidad **(sC1)-(sC4)**, utilizando las soluciones explícitas y los estimativos de los tres subproblemas asociados.

- Se obtuvo un resultado de buena colocación local para el **IBVP** lineal descrito en el item anterior, a través del argumento de contracción en una bola.

- Se obtuvo un resultado de buena colocación global y un estimativo para el **IBVP** no lineal (2.1) con valores iniciales $(f_1, f_2) \in Y_0^1(\mathbb{R}^+)$ y datos de frontera cero.

- Se utilizó el resultado del item anterior para determinar un resultado de buena colocación global y un estimativo para el **IBVP** (3) asociado a la ecuación de Benney-Luke considerado inicialmente.

Bibliografía

[1] Quintero, J., Montoya O. (2015): Existence and non existence of solitons for a 1D Benney-Luke model of higher order: *Advances in Differential Equations.* **2**0, 1187–1220.

[2] Quintero J. (2003): Nonlinear stability of a one-dimensional Boussinesq equation. *Dynam. Diff. eq.* **1**5 125–142.

[3] Quintero, J.R. ; Pego, R. L. (1999): Stability of solitary waves of a fifth-order water wave model. *Physica D.* **4**5, 476–496

[4] Bona J.L., Chen M., Saunt J. C. (2004): Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media II: The nonlinear theory, *Nonlinearity*, **17**, 925-952.

[5] Bona J.L., Sachs R. L. (1988): Global existence of smooth solutions and stability theory of solitary waves for a generalized Boussinesq equation, *Comm. Math. Phys.*, **1**18, 15-29.

[6] Bona J.L,, Sun S.M., Zhang B.Y. (2001): A non-homogenous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation in a quarter plane, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **3**26, 427-490.

[7] Colliander J.E., Kenig C.E. (2002): The generalized Korteweg-de Vries equation on the half line, *Comm. Partial Differential Equations*, **2**7, 2187-2266.

[8] Holmer J. (2006): The initial-boundary value problem for the Korteweg-de Vries equation, *Comm. Partial Differential Equations*, **3**1, 1151-1190.

[9] Xue R.Y. (2006): Local and global existence of solutions for the Cauchy problem of a generalized Boussinesq equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **3**16, 307-327.

[10] Xue R.Y. (2008): The initial-boundary-value problem for the “good” Boussinesq equation on the half line, *Nonlinear Analysis*, **6**9, 647-682.